Kan en reduksjon av forsørgelsesbyrden brukes som et argument for økt arbeidsinnvandring?

Aleksander Wisem Sahnoun

Masteroppgave for graden Master of Economic Theory and Econometrics

Økonomisk Institutt

UNIVERSITETET I OSLO

04/05/2009

Forord

Denne oppgaven er skrevet i forbindelse med avslutningen av det femårige masterstudiet i samfunnsøkonomi ved Universitet i Oslo.

Jeg ønsker å rette en veldig stor takk til Espen Henriksen for hans veiledning gjennom denne oppgaveprosessen. Jeg ønsker også takke Tord Krogh for mange gode innspill og Stine Horn for gode innspill, hennes lingvistiske bidrag og hennes støtte.

Eventuelle feil i oppgaven er helt og holdent mitt ansvar.

Berkeley, California, USA, mai 2009
Aleksander Wisem Sahnoun

Sammendrag

Den kommende eldrebølgen skyldes de store fødselskullene fra etterkrigstiden, og er en demografisk utfordring for det norske pensjonssystemet. Større pensjonsutbetalinger over statsbudsjettet kommer til å øke den økonomiske belastningen på den arbeidende delen av befolkningen. Økt arbeidsinnvadring er ofte blitt brukt som argument for å redusere denne byrden.

Min hypotese er at denne argumentasjonen – bevisst eller ubevisst – baserer seg på den enkle to-periode overlappende generasjonsmodellen som har en lukket analytisk løsning. Denne modellen krever sterke forutseninger, men har en appellerende løsning som er enkel å resonnere ut ifra og videreformidle. Ønsker vi å utvide modellene med flere perioder har ikke denne en analytisk løsning, og modellen må derfor løses numerisk. Den enkleste modellen fremstår derfor for mange som et nærliggende utgangspunkt å basere sin argumentasjon på.

Jeg tar utgangspunkt i den enkle to-periode modellen og løser denne både analytisk og numerisk. Deretter letter jeg på flere av de strenge forutsetningene for å se effekten disse har på resultatene. Ved å benytte meg av den samme strukturen på den numeriske løsningen i de utvidede modellene, ønsker jeg å opprettholde den enkelheten og etterretteligheten av løsningen som gjør to-periode modellen attraktiv også i de mer kompliserte modellene.

Den relative generasjonsstørrelsen er viktig i den enkle modellen, og ut ifra dette kan man trekke konklusjonen at man ønsker å utligne forskjellen mellom generasjonsstørrelsene ved hjelp av økt arbeidsinnvandring. Denne konklusjonen holder derimot ikke i mer kompliserte modeller hvor jeg åpner for fri kapitalflyt og arbeidsinnvandring av lavt utdannet arbeidskraft.

Innhold

Liste over Algoritmer

Tabeller

Figurer

1 Innledning

Den demografiske utviklingen i Norge er en utfordring med tanke på kostnader knyttet til pensjonsutbetalinger. De store fødselskullene fra babyboomen i etterkrigstiden nærmer seg nå pensjonsalderen, og de skal motta utbetalinger fra et pensjonssystem løpende finansiert gjennom skatt på den arbeidende delen av befolkningen. En økning i antall pensjonister i tillegg til økt levealder gir isolert sett en økt økonomisk belastning for personer i yrkesfør alder. En indikator på denne belastningen er "forsørgelsesbyrden", som er definert som raten mellom antall eldre personer (66+) og antall personer i yrkesfør alder (19–66 år). Økt arbeidsinnvadring er ofte blitt brukt som argument for å takle de demografiske utfordringene fordi det vil redusere forsørgerbyrden, som for eksempel i Petersen, Foss & Solberg (2000). Hvis denne argumentasjonen er basert på en enkel økonomisk modell med for strenge modellforutsetninger, kan dette gi opphav til feilaktige normative slutninger og derav feilaktige politiske anbefalinger.

For å konstruere en modell av virkeligheten må man gjøre antagelser. Det er viktig at man er klar over hvordan disse antagelsene påvirker modellutfallet. Det er nærliggende å tro at argumentasjonen om at økt arbeidsinnvandring er en mulig løsning på utfordringene pensjonssystemet står overfor, bevisst eller ubevisst, baserer seg på resonnementer rundt den enkle overlappende generasjonsmodellen (OLG). Denne modellen har en lukket analytisk løsning som er enkel å resonere ut ifra, og den er derfor også enkel å formidle videre. De relative generasjonsstørrelsene er viktige i den enkle modellen. Ut ifra dette kan man trekke konklusjonen at det er mulig å takle de økonomiske utfordringene pensjonssystemet står overfor ved å utligne forskjellen mellom generasjonsstørrelsene, og at dette kan oppnås gjennom økt arbeidsinnvandring. Arbeidsinnvandrere i Norge opparbeider seg, i likhet med andre arbeidere, fordringer på den norske stat. Det er derfor i realiteten vanskelig å skille mellom arbeidsinnvandring og innvandring på en økonomisk meningsfylt måte.

Min hypotese er at man ikke kan basere argumentet om å møte de økonomiske utfordringene i pensjonssystemet med økt arbeidsinnvandring, på implikasjonene av en modell hvor vi åpner for internasjonale arbeids- og kapitalmarkeder. Jeg ønsker derfor å teste dette argumentets gyldighet. Mer presist ønsker jeg å besvare spørsmålet: Kan en reduksjon av forsørgelsesbyrden brukes som et argument for økt arbeidsinnvandring?

1.1 Bakgrunn

I det nåværende norske pensjonssystemet, Folketrygden, dekkes de årlige utbetalingene over det ordinære statsbudsjettet. Folketrygden finansieres dermed gjennom den ordinære beskatningen. Forholdet mellom antall eldre som mottar pensjon og antall personer i yrkesaktiv alder som bidrar med skatt, er derfor en viktig faktor med tanke på det økonomiske utfordringene dagens pensjonssystem står overfor. Flere eldre vil også medføre høyere utgifter over helse- og sosialbudsjettet til blant annet sykehjem og sykehus.

I de tre tiårene etter andre verdenskrig var gjennomsnittlig antall fødsler per år 63 910, mens gjennomsnittet var 55 907 for de tre siste tiårene fram til 2005.[1] De store fødselskullene i etterkrigstiden må derfor forsørges av en relativt mindre gruppe personer i yrkesaktiv alder. Hvis vi ser på utviklingen i forsørgelsesbyrden så var det i år 2008

[1]Se tabell (8) i appendiks (A)

4,73 personer i arbeidsaktiv alder per person over 66 år, og ifølge middelalternativet til SSBs befolkningsfremskrivninger vil denne raten reduseres til 4,04 i 2020, 2,86 i 2030 og 2,51 i 2050.[2] Det vil si at enhver person i yrkesfør alder i 2050 må forsørge nesten dobbelt så mange eldre som i 2008. Økende forventet levealder og en gradvis økning av pensjonsrettighetene trekker også i en retning av økte utgifter for folketrygden. De samlede utgiftene til alderspensjonen i folketrygden er anslått å vokse fra 4,5 % av total BNP for Norge i 2002 til 14,8 % i 2050.[3]

1.2 Arbeidsinnvandring

Norge er en del av det europeiske arbeidsmarkedet gjennom EØS-avtalen og EFTA-konvensjonen. Dette innebærer at det er fri bevegelighet for arbeidstagere mellom Norge og EØS/EFTA-området. Regjeringen har likevel rom for å drive aktiv arbeidsinnvandringspolitikk. I St.meld.nr.18 (2007–2008) nevnes informasjons- og rekrutteringskampanjer som eksempler på muligheter for å øke arbeidsinnvandringen til Norge.[4] Der nevnes også muligheten til å regulere arbeidsinnvandring gjennom godkjenningsprosessen for arbeidstagere fra de nye EU-landene, som er underlagt overgangsordninger, og for arbeidstagere fra tredjeland.[5]

Det var rekordmange arbeidsinnvandrere i Norge i 2008. Per 1. mai 2008 var det 90 700 utlendinger med gyldig arbeidstillatelse i Norge, hvorav 60 000 av disse kom fra de nye EØS-landene.[6] I stor grad består arbeidsinnvandringen til Norge av personer med lav utdanning. Lønnsnivået i Norge er høyt, med relativt små forskjeller mellom lønn til høyt og lavt utdannet arbeidskraft.[7] Gjennomsnittlig brutto årslønn i Norge var i 2006 50,95 % høyere enn gjennomsnitt for OECD-land i Europa.[8] Det norske arbeidsmarkedet er derfor attraktivt for lavt utdannede personer. Av alle lønnstakere på kortidsopphold i Norge var 23,6 % ansatt i bygg- og anleggsnæringen i 4. kvartal 2007.[9] Av arbeidstakere på kortidsopphold fra EU-land i Øst-Europa, var 31,1 % ansatt i bygg- og anleggsnæringen, 21,5 % i industri og 20,1 % i utleie av arbeidskraft. En stor del av arbeidsinnvandrerne fra EU-land i Øst-Europa er dermed ansatt i arbeidsintensive lavtlønnede yrker.

I FAFO rapporten "Polonia i Oslo" (Fafo 2007) svarer kun 5 % av polakkene i Oslo at de har tenkt til å reise tilbake til Polen innen ett år uten planer om å komme tilbake til Norge. 20 % oppga at de trolig, eller helt sikkert, ikke ville flytte tilbake til Polen. Hvis dette er representativt for arbeidsinnvandrere generelt, betyr det at en stor andel av arbeidsinnvandrerne ønsker å bli i Norge. Arbeidstakere med arbeidstillatelse på over 3 måneder, og som betaler skatt til Norge, blir medlem av Folketrygden. Ektefeller og barn blir medlemmer av Folketrygden hvis de er bosatt i Norge med oppholdstillatelse som er gyldig i et år.[10] Arbeidsinnvandrere får gjennom deltagelse i det norske arbeidsmarkedet

[2] Se figur (1) i appendiks (A)
[3] (NOU 2004)
[4] (AID 2008)
[5] Land utenfor EØS/EFTA området
[6] (UDI 2008)
[7] Se figur (2) i appendiks (A)
[8] (OECD 2007*b*)
[9] (SSB 2008*e*)
[10] (NAV 2009*b*), for tolkning se (UDI n.d.)

krav på velferdsgoder,[11] slik som gratis helsevesen og pensjonsrettigheter, fra den norske stat.

Arbeidsinnvandrere opparbeider seg fordringer på den norske stat og ønsker, som FAFO rapporten antyder, ofte å bli i landet. Det er mulig å søke om norsk statsborgerskap hvis man har bodd syv av de siste ti årene i Norge.[12] I kontrast til det norske systemet er den "Sveitsiske modellen", hvor gjestearbeidere ikke har de vanlige rettighetene i arbeidslivet og må reise tilbake til hjemlandet når arbeidsforholdet er slutt.[13] Siden det er vanskelig å skille mellom arbeidsinnvandring og innvandring på en økonomisk meningsfylt måte, vil jeg i fortsettelsen omtale arbeidsinnvandring med begrepet innvandring.

I en rapport fra Frischsenteret analyseres det i hvilken grad innvandrere fra den første immigrasjonsbølgen på 1970-tallet er aktive i det norske arbeidsliv. I år 2000 var arbeidsraten blant disse innvandrerne 50 %, mens den for resten av befolkningen var 87 %. 74 % av de som ikke var i arbeid mottok en permanent uføretrygd, og 16 % mottak en annen form for trygd.[14] Det er vanskelig å spå hvor annerledes utviklingen blir for den nye generasjonen innvandrere, men hvis det er slik at innvandrere er netto mottakere av velferdsgoder gjennom et livsløp, så er dette en viktig betraktning hvis man i utgangspunktet ønsker å møte de økonomiske utfordringene ved økte pensjonsutbetalinger gjennom innvandring.

Den uavhengige institusjonen DREAM-gruppen la i 2004 fram rapporten "Indvandrere, offentlige udgifter og finanspolitisk holdbarhed" på oppdrag fra det danske "Ministeriet for Flygtninge, Indvandrere og Integration".[15] Rapporten baserer seg på beregninger gjort med en danskutviklet overlappende generasjonsmodell, DREAM, og analyserer effekten av innvandring på offentlige utgifter.[16] Innvandring øker arbeidsstyrken, men data viser at arbeidsledigheten blant innvandrere er høyere enn for resten av befolkningen, at de har høyere fravær i jobb og at innvandrere fra mindre utviklede land har lavere produktivitet. I rapporten analyseres et sett av senarioer og de finner at økt innvandring har en negativ effekt på statlige finanser.

I 2005 la Velferdskommisjonen i Danmark fram rapporten "Fremtidens velfærd - vores valg", delvis basert på DREAM modellen, hvor de foreslo en rekke tiltak for å sikre framtiden til det danske velferdssamfunnet.[17] [18] Blant tiltakene var innføring av en integrasjonseksamen for innvandrere og et poengsystem for utlendinger som ønsker å bosette seg i Danmark, hvor det gis poeng på grunnlag av utdannelse, språkerfaring, arbeidserfaring, alder og ansettelsesforhold. Dette er i samsvar med Storesletten (2000), som finner at den økonomiske utfordringen knyttet til aldringsproblemet i USA kan møtes ved innvandring

[11] Folketrygden gir rett til alders, etterlatte- og uførepensjon, tidsbegrenset uførestønad, grunnstønad og hjelpestønad ved uførhet, attføringsytelser, stønad ved yrkesskade, stønad til enslige forsørgere, kontantstønad ved egen og andre barn og andre nære pårørendes sykdom, fødsel, adopsjon og arbeidsløshet, medisinsk stønad ved sykdom, skade, legemsfeil, svangerskap og nedkomst og ved avbrudd av svangerskap og gravferdsstønad.

[12] Det er i tillegg noen andre krav, se UDI (2009)

[13] (FOM 2009)

[14] (Bernt Bratsberg & Røed 2006)

[15] (Pedersen et al. 2004)

[16] Danish Rational Economic Agents Model

[17] (Velfærdskommissionen 2005)

[18] Kommisjonen ble nedsatt av Regjeringen Anders Fogh Rasmussen 1 i 2003, og ble ledet av Torben M. Andersen, professor ved Institutt for økonomi ved Aarhus Universitet.

av høyt utdannede personer.

1.3 Problemstillingen i offentlig søkelys

Flere sentrale politiske myndigheter fremholder innvandring som et betydningsfullt verktøy for å øke den yrkesaktive delen av befolkningen. I et forslag fra Stortingsrepresentantene Jan Petersen, Per-Kristian Foss og Erna Solberg om å åpne for større innvandring og forenkle saksbehandlingen av arbeidstillatelser,[19] er økt innvandring for å sikre pensjonsutbetalinger et viktig argument; "I finanstalen slo finansminister Karl Eirik Schjøtt-Pedersen fast at det aldri har vært flere i arbeid i Norge enn nå. Samtidig påpekte han at: "[...]." Finansministeren sluttet seg her til det synspunkt som det er bred enighet om i det norske samfunn, at den viktigste knapphetsfaktoren for å sikre velstandsutviklingen og velferdsgodene i årene som kommer er arbeidskraft."

Fra Arbeids- og velferdsetaten (NAV) sin 2008-konferanse som hadde temaet "Hvordan sikre nok arbeidskraft i framtiden", la NAV-direktør, Tor Saglie, fram følgende problemstilling; "Dersom alle aldersgrupper tilpasser seg i 2030 som de gjorde i 2007 vil vi "mangle" vel 200 000 årsverk for å opprettholde dagens forhold mellom årsverk i arbeid og "ikkearbeidede årsverk" i befolkningen 15 år og over." Et av forslagene for å motvirke den økte "mangelen" på arbeidskraft er økt innvandring.[20] NAV og Tom Saglie slutter seg her også til argumentet om at å jevne ut generasjonsstørrelser er viktig for å sikre bærekraften til pensjonssystemet.

1.4 Oppbygging av oppgaven

Modellene i oppgaven er fordelt ut over fire kapitler. Etter hver modell følger en kort oppsummering over implikasjonene av modellen, mens en lengre diskusjon av resultatene er lagt til slutten av oppgaven. Først introduserer jeg grunnmodellen og ser på implikasjonene av de strenge antagelsene. Jeg vil benytte meg av en overlappende generasjonsmodell (OLG) for å modellere overføringer av kapital mellom generasjoner. Dette er den modellen jeg mener ligger til grunn for argumentet med å jevne ut forskjeller i generasjonsstørrelsene for å møte utfordringene i pensjonssystemet. Jeg bygger opp denne modellen rundt den analytiske løsningen for så å løse den numerisk. Ved å benytte meg av samme struktur i grunnmodellen som i resten av modellene, ønsker jeg å tydeliggjøre hvordan hver enkelt utvidelse påvirker modellutfallet.

I grunnmodellen forutsetter jeg at individer lever to perioder i en lukket økonomi, uten mulighet for å spare i internasjonale kapitalmarkeder. Hver krone spart i arbeidsaktiv alder vil bli investert i innenlands kapital. Hvis vi forutsetter av det er avtagende avkastning av kapital, vil en generasjon som sparer relativt mye totalt sett, ha en relativt lavere avkastning på sine oppsparte midler. For å analysere betydningen av generasjonsstørrelser forutsetter jeg at annethvert fødselskull er stort og lite, og hvor et fødselskull består av individer født over det som tilsvarer én periode i modellen.

Jeg vil deretter utvide modellen for å se hvordan resultatene påvirkes av at hvert individ lever i tre generasjoner, to generasjoner som arbeidsaktiv og en som pensjonist. Under denne forutsetningen vil det totale antallet personer som arbeider til enhver tid

[19] (Petersen, Foss & Solberg 2000)
[20] (Saglie 2008)

være stabilt, da det alltid er en liten og stor generasjon som jobber sammen, men i forskjellige faser i livet.

I de to siste modellkapitlene vil jeg lette på forutsetningen om en lukket økonomi gjennom å åpne kapital- og arbeidsmarkedene overfor utlandet. Jeg velger å analysere disse problemstillingene hver for seg, for å enklere kunne forstå de økonomiske mekanismene.

Jeg åpner for fri flyt av kapital slik at aktørene har mulighet for å investere i internasjonale kapitalmarkeder. Deretter åpner jeg for fri flyt av arbeidskraft. Siden en stor andel av arbeidsinnvandrerne til Norge har lav utdannelse, gjør jeg et sett av utvidelser for å kunne analysere problemstillingen i et relevant perspektiv. Først introduserer jeg en modell med et løpende finansiert pensjonsprogram. I et pensjonssystem hvor pensjonsutbetalingene dekkes av overføringer fra den skattende delen av befolkningen, vil hvert enkelt medlem motta mindre i pensjon hvis det er en relativt mindre generasjon å skattlegge (gitt at skattetrykket er det samme). Deretter introduserer jeg en modell med heterogenitet hos arbeidstagerne. Denne modellen åpner for forskjellig produktivitet hos arbeidstagere. Individer med høy utdanning forutsettes å være mer effektive enn individer med lav utdanning.

Disse modellutvidelsene kan kombineres for å analysere effekten av innvandring på forskjellige grupper i en økonomi med et løpende finansiert pensjonssystem. Pensjonsordningen overfører kapital fra høyt til lavt utdannede pensjonister. Den høyt utdannede delen av arbeidsstokken vil bidra mer til velferdskassen enn gjennomsnittet – de er netto bidragsytere – mens den lavt udannede delen av arbeidsstokken vil bidra mindre enn gjennomsnittet, de er netto mottakere av velferdsgoder. Hvilke implikasjoner gir modellen hvis vi åpner for innvandring av lavt utdannet arbeidskraft? Kan denne modellen gi normative implikasjoner som er viktige for utformingen av norsk innvandringspolitikk?

2 Modell 1: To-periode OLG

Økonomiske modeller er verktøy for å forstå virkeligheten i en verden som er for kompleks til at vi kan se alle de kausale sammenhengene. En modell forenkler realiteten og benytter seg av antagelser om hvordan vi tror verden er. Implikasjonene fra modellene kan dermed brukes som grunnlag for policyanbefalinger. Argumentasjon med bakgrunn i modeller med for sterke forutsetninger kan gi opphav til feilaktige normative slutninger. OLG modellen krever sterke forutsetninger for å ha en lukket analytisk løsning, men denne er til gjengjeld enkel å resonere ut i fra. Ønsker vi å utvide modellen med flere perioder har ikke denne en lukket analytisk løsning, og modellen må derfor løses numerisk. Den analytisk løsbare modellen fremstår derfor for mange som et fristende alternativ å basere sin argumentasjon på.

2.1 Teori

Veldig enkelt kan man dele et livsløp inn i tre deler. I første del av livet forberedes man på arbeidslivet. I andre del av livet mottar man arbeidsinntekt som man bruker på konsum i dag og på sparing til pensjonisttilværelsen. I den tredje fasen av livet lever man på pensjonsutbetalinger og oppsparte midler. Som en forenkling uten implikasjoner for de spørsmål jeg ønsker å besvare, utelukker jeg den første fasen av livet i modellene og fokuserer på overføringen fra yrkesaktiv alder til pensjonisttilværelsen. I denne modellen forutsetter jeg en lukket økonomi uten muligheter for å spare i internasjonale kapitalmarkeder. Det vil si at all sparing blir investert i innenlands kapital.

2.1.1 Husholdningene

Jeg forutsetter at hver husholdning består av en representativ agent.[21] Agenten lever i to perioder. Relatert til den virkelig verdenen, så kan vi tenke oss at hver periode varer i ca 30 år. Agenten jobber i første periode og lever på oppsparte midler i andre periode. I første periode mottar agenten lønn og gjør et valg mellom hvor mye å konsumere i første periode, og hvor mye å spare til pensjonisttilværelsen i andre periode. I den andre perioden mottar agenten avkasting av investeringen fra første periode, og konsumerer denne og oppsparte midler i slutten av perioden. I denne modellen har agenten en beslutningsvariabel, nemlig hvor mye å spare i første periode.

En agent født i tid t tilhører fødselskull t, er ung i tid t, gammel/pensjonist i tid $t+1$ og har sluttet å eksistere i tid $t+2$. Antall individer i fødselskullet født i tid t er N_t. Jeg forutsetter at annethvert fødselskull er lite og stort. En agent som er en del av dette fødselskullet konsumerer en sammensatt konsumvare c_t^u som ung og c_{t+1}^g som gammel. Agenten diskonterer ned framtiden med en faktor β.

Hver agent ønsker å maksimere sin livstidsnytte, som er avhengig av konsum i de to periodene. Jeg forutsetter her at agenten ikke bryr seg om hendelser etter døden slik som arv til barn osv. Den generelle nyttefunksjonen kan uttrykkes:

$$U(c_t^u, c_{t+1}^g) = u\left(c_t^u\right) + \beta u\left(c_{t+1}^g\right).$$

[21] Modellen baserer seg på den gitt i Economic Growth, Second Edition (Barro & Sala-i-Martin 2003)

Beskrankningene agenten står overfor er:

$$c_t^u + s_t^u = w_t e^u \tag{1}$$

$$c_{t+1}^g = (1 + r_{t+1})\, s_t^u, \tag{2}$$

hvor r_{t+1} er renten på én-periode innskudd/lån mellom periode t, $t+1$ og $w_t e^u$ er lønn for den unge generasjonen i tid t. e^u angir hvor effektiv agenten er. Hver enkelt agent tar r_{t+1} og w_t for gitt. Prisen på det kompositte konsumgodet er normalisert til én.

Agenten ønsker å maksimere nyttefunksjonen med hensyn til de beskrankningene han står overfor. Dette maksimeringsproblemet gir et sett av betingelser for å finne den maksimerte livstidsnytte. Fra agentens førsteordensbetingelser får vi optimalitetsbetingelsen

$$u'\left(c_t^u\right) = \beta\left(1 + r_{t+1}\right) u'\left(c_{t+1}^g\right). \tag{3}$$

Denne betingelsen impliserer at i optimum skal agenten være indifferent mellom det å konsumere en ekstra enhet i periode én (venstresiden i ligningen) og den neddiskonterte nytten av å spare denne enheten og konsumere sparing og avkastning i periode to (høyresiden i ligningen). En høyere rente betyr at prisen på konsum i andre periode blir billigere siden agenten trenger å spare mindre i første periode. En høyere diskonteringsfaktor, β, betyr at agenten bryr seg mer om framtiden og konsum i andre periode. Hvis $\beta\left(1 + r_{t+1}\right) > 1$ er konsumet størst i andre periode, mens $\beta\left(1 + r_{t+1}\right) < 1$ vil gi høyest konsum i første periode.

Jeg benytter meg av en nyttefunksjon med konstant relativ risikoaversjon i den videre analysen,

$$U(c_t^u, c_{t+1}^g) = \frac{\left(c_t^u\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^g\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \tag{4}$$

og setter for enkelhetsskyld parameteren for risikoaversjon lik 1. Nyttefunksjonen reduseres da til en logaritmisk nyttefunksjon,[22]

$$U(c_t^u, c_{t+1}^g) = \ln c_t^u + \beta \ln c_{t+1}^g.$$

Betingelsen for optimal sparing gitt denne nyttefunksjonen er gitt ved (se appendiks C):

$$s_t^u = \frac{1}{1+\beta} w_t e^u. \tag{5}$$

Optimal sparing er med en logaritmisk nyttefunksjon kun en funksjon av lønnen. Med økt lønn, og dermed høyere livstids velstand, ønsker agenten også å øke konsumet i andre periode, så sparingen øker.

Effekten av høyere rente kan deles inn i en substitusjonseffekt og en inntektseffekt. Høyere rente gjør at konsum i andre periode blir relativt sett billigere, noe som øker sparingen. Dette er substitusjonseffekten. Inntektseffekten er at agenten kan konsumere mer i begge perioder som følge av prisreduksjonen. Med $\theta = 1$ nuller disse effektene ut hverandre og optimal sparing er uavhengig av renten.

[22]Strengt talt brukes grensen $\theta \overset{lim}{\rightarrow} 1$.

2.1.2 Bedriftene

Bedriftene eies av husholdningene og produserer varer ved hjelp av kapital og arbeidskraft som innsatsfaktorer. Jeg forutsetter et representativt firma med en Cobb-Douglas produktfunksjon,

$$F\left(K_t, L_t\right) = \gamma K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha},$$

hvor K_t er kapital i tid t, L_t er effektive arbeidere i tid t ($L_t = N_t e^u$), α er kapitalens andel av produksjon/inntekt og γ indikerer teknologisk nivå.

Denne produktfunksjonen innehar egenskapen konstant skalautbytte og impliserer dermed at vi kan skrive produktfunksjonen per arbeider som en funksjon av kapital per arbeider k_t,

$$f(k_t) = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = \gamma k_t^{\alpha}.$$

Profittfunksjonen for det representative firmaet kan da uttrykkes:

$$\pi = \gamma K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - R_{t+1} K_t - w_t Lt.$$

Førsteordensbetingelsene for optimum er gitt ved:

$$R_{t+1} = \frac{\partial F\left(K_t, L_t\right)}{\partial K_t}$$

$$w_t = \frac{\partial F\left(K_t, L_t\right)}{\partial L_t}.$$

I optimum blir kapital og arbeidskraft betalt verdien av deres marginale produkt. For kapital er dette leieprisen R og for arbeidskraft lønnen w. Kapital er homogent og depresierer med en konstant rate $\delta > 0$. Netto avkastning av en kapitalenhet investert av en husholdning er derfor $R - \delta$. Husholdningene kan motta en avkastning r på kapitalen sin ved å låne ut til andre husholdninger, så vi har at kapital og lån er perfekte substitutter og må derfor gi lik avkastning, $r_{t+1} = R_{t+1} - \delta$.

Marginalt produkt av arbeidskraft og kapital kan uttrykkes:

$$r_t = f'\left(k_t\right) - \delta = \alpha\gamma k_t^{\alpha-1} - \delta \tag{6}$$

$$w_t = f\left(k_t\right) - f'\left(k_t\right) k_t = (1-\alpha)\gamma k_t^{\alpha}. \tag{7}$$

Lønnen avhenger positivt av kapital per arbeider. Mer kapital per arbeider øker produktiviteten av hver enhet arbeidskraft. Motsatt så avhenger renten negativt av kapital per arbeider. Mer kapital på like mange arbeidere reduserer avkastningen av hver enkelt kapitalenhet.

2.1.3 Aggregerte ressursbeskrankninger

Aggregert inntektsbeskrankning:

$$Y_t = w_t L_t + \left(r_t + \delta\right) K_t \tag{8}$$

Total inntekt fordeles på kapital og arbeidskraft.

Aggregert utgiftsbeskrankning:

$$Y_t = c_t^u N_t + c_t^g N_{t-1} + K_{t+1} - (1-\delta)K_t \tag{9}$$

Forbruk av ressurser i en tidsperiode t, konsum + investering.

Aggregert produksjonsfunksjon:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = \gamma K_t^\alpha \left(N_t e^u\right)^{1-\alpha} \tag{10}$$

Kapital akkumulasjon:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= s_t^u N_t \\ k_{t+1} &= \frac{N_t}{N_{t+1} e^u} s_t^u \end{aligned} \tag{11}$$

2.1.4 Likevekt

Likevekt er gitt ved et sett av priser hvor husholdningene og bedriftene ikke ønsker å endre atferd og som klarerer arbeids- og kapitalmarkedene.

1. Individer velger s^u gitt r og w
2. Bedrifter velger k og l gitt r og w
3. Valget av s^u, k og l i de aggregerte betingelsene fra ligning (8, 9 og 10) gir r og w

2.2 Analytisk løsning

Fra den analytiske løsningen i appendiks (C) vet vi at den lukkede løsningen for optimal sparing ved en logaritmisk nyttefunksjon ($\theta = 1$) er gitt ved:

$$s_t^u = \left(e^u \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}} \left(\frac{N_{t-1}}{N_t e^u}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}} \left(\frac{N_{t-2}}{N_{t-1} e^u}\right)^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}}.$$

2.3 Numerisk løsning

Løsningen av modellen oppnår jeg ved simulering i Matlab. Programmet som løser dette problemet kan deles inn i tre deler; først tilegnes verdier til parameterne i modellen, så simuleres løsningen og til slutt kalkuleres nøkkelverdiene konsum og livstidsnytte. Den simulerte løsningen oppnås ved at agentenes sparebeslutning oppdateres inntil hver agents sparebeslutning er optimal gitt de andre agentenes sparebeslutning.

Videre vil jeg først parametrisere modellen, detter finne den analytiske løsningen, så angi pseudokoden for programmet og til slutt presentere resultatene.[23] Programmet er gjengitt i pseudokode for at det skal være enklere å forstå hvordan videre modellutvidelser påvirker løsningen av modellen. Etter resultatene oppsumerer jeg implikasjonene av modellen, mens en lengre diskusjon av modellene er plassert senere i oppgaven.

[23] Pseudokode er en abstrakt måte å gjengi algoritmer på, hvor man kombinerer vanlig og programeringsspåk.

2.3.1 Parametrisering

Jeg bruker verdier på parameterne hentet fra litteraturen. Fra Cooley (1997) sin kalibrering av modellen finner vi kapitalens andel av produksjonen $\alpha = 0,3452$, depresieringsraten for kapital $\tilde{\delta} = 0,076$ og neddiskonteringsraten $\tilde{\beta} = 0,9728$.[24] Fordi de kvalitative aspektene i oppgaven er viktigere enn de kvantitative velger jeg for enkelhets skyld å sette $\alpha = 1/3$, $\tilde{\delta} = 0,075$ og $\tilde{\beta} = 0,98$. Disse verdiene er i tråd med gjeldende litteratur. I for eksempel Gomme, Kydland & Rupert (2001) som bygger på metoden fra Kydland & Prescott (1982) kalibrerer de modellen med verdiene $\alpha = 0,3267$, $\tilde{\delta} = 0,0295$ og $\tilde{\beta} = 0,9855$.

Både depresieringsraten og neddiskonteringsraten er årlige størrelser. Verdiene på disse to parametrene når hver periode er X år er $\beta = (\tilde{\beta})^X$ og $\delta = 1 - (1 - \tilde{\delta})^X$. I to-periode modellen setter jeg X, antall år i en periode, lik 30.

Størrelsen på generasjonene setter jeg lik 1,5 og 2. Da dette er en kvalitativ oppgave, er ikke disse demografiske verdiene nøyaktig estimert. Valget av verdier kan tolkes som at den store generasjonen er 33 % større enn den lille.[25] Effektivitetsparameteren normaliserer jeg til én da denne ikke endrer implikasjonene av modellen.

Løst analytisk

Gitt parametriseringen er verdien for optimal sparing i den analytiske løsningen med like generasjonsstørrelser lik:

$$s_t^u = \left(\frac{0,5455}{1 + 0,5455} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \right)^{\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}^2}} = 0,1141.$$

2.3.2 Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 1: Alle modellene – Parametrisering

$\alpha \leftarrow 1/3$; `// Kapitalens andel av produksjonen`
$\tilde{\beta} \leftarrow 0,98$; `// Neddiskonteringsfaktor`
$\tilde{\delta} \leftarrow 0,075$; `// Depresieringsrate`
$\gamma \leftarrow 1$; `// Teknologifaktor`
$\theta \leftarrow 1$; `// Logaritmisk nyttefunksjon`

Pseudokode – Algoritme 2: To-periode modellen – Tilegne verdier

$X \leftarrow 30$; `// Antall år`
$\beta \leftarrow 0,5455$; `//` $(\tilde{\beta})^X = 0,5455$
$\delta \leftarrow 0,9036$; `//` $1 - (1 - \tilde{\delta})^X = 0,9036$
$e^u \leftarrow 1$; `// Normalisert til 1`
$N \leftarrow \begin{bmatrix} 1,5 & 2 \\ 2 & 1,5 \end{bmatrix}$; `// Generasjonsstørrelser`

[24]Oppnår disse verdiene ved å sette γ og η lik null i Cooley (1997)

[25]Hvis man ønsker å relatere disse verdiene til virkeligheten, så er det i Norge i dag ca 3.57 mill personer over 20 år, hvorav 1.97 mill er mellom 20 og 50 år og 1.6 mill er eldre enn 50 år.(SSB 2009)

Pseudokode – Algoritme 3: Modell 1 – Simulering

$s^u \leftarrow [0,2\ 0,2]'$; `// Initial gjetning på sparebeløp`

repeter

  For en av de to generasjonene annenhver gang ;

  Bruk sparebeslutningen til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t og $t+1$;

  $k_t \leftarrow \frac{N_{t-1}}{N_t e^u} s_{t-1}$; `// Ligning (11)`

  $k_{t+1} \leftarrow \frac{N_t}{N_{t+1} e^u} s_t$; `// Ligning (11)`

  Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1} *og* w_t;;

  $r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta$; `// Ligning (6)`

  $w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k_t^{\alpha}$; `// Ligning (7)`

  Bruk avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid $t\ /\ t-1$;;

  $s^u_{t/t-1} \leftarrow \frac{1}{1+\beta} w_t e^u$; `// Ligning (5)`

inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 4: Modell 1 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene;

$c_t^u \leftarrow w_t e^u - s_t^u$; `// Ligning (1)`

$c_{t+1}^g \leftarrow (1 + r_{t+1})\, s_t^u$; `// Ligning (2)`

$U(c_t^u, c_{t+1}^g) \leftarrow \frac{(c_t^u)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c_{t+1}^g\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (4)`

2.3.3 Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Grunnmodellen	
		(1.1)	(1.2)
k	l	0,1141	0,1416
	s	0,1141	0,0920
r^*	l	0,0139	0,0185
	s	0,0139	0,0094
w	l	0,3234	0,3475
	s	0,3234	0,3009
s^u	l	0,1141	0,1227
	s	0,1141	0,1062
c^u	l	0,2092	0,2248
	s	0,2092	0,1947
c^g	l	0,1727	0,2125
	s	0,1727	0,1406
$U(c)$	l	**-2,5222**	**-2,3373**
	s	**-2,5222**	**-2,7065**
Y	l, s	0,7276	0,7819

Tabell 1: Resultater fra modell 1

Modell 1.1 – *To-periode modell med like generasjonsstørrelser*
Modell 1.2 – *To-periode modell med ulike generasjonsstørrelser*
Forkortelser: *l,s – liten,stor generasjon, k – kapital per arbeider,* $r^* = ((1+r)^{\frac{1}{X}} - 1)$ – *avkastning av kapital, w – lønn,* s^u *– sparebeslutning,* c^u,c^g *– konsum som ung og gammel,* $U(c)$ *– livstidsnytte ,* Y *– inntekt/produksjon/forbruk*
Kommentar – *På grunn av symmetrien i modellen oppgir jeg bare kapital per arbeider (k) for første periode for hver av generasjonsstørrelsene. Første periode for en generasjon er andre periode for den andre generasjonen*

2.4 Modellimplikasjoner

I likevekt har vi et sett av priser - lønn og rente - som klarerer arbeids- og kapitalmarkedet. De økonomiske mekanismene som følger av forskjeller i generasjonsstørrelser leder til forskjeller i livstidsnytte gjennom disse prisene. Fra den numeriske løsningen av den enkle to-periode overlappende generasjonsmodellen, ser vi at agenter tilhørende en liten generasjon oppnår både relativt høyere avkastning på sin arbeidskraft når de er unge og relativt høyere avkastning på sin sparing når de er gamle. Den bakenforliggende mekanismen er at arbeids- og kapitalstokken varierer med størrelsen på generasjonene. Arbeidskraft for agenter tilhørende en liten generasjon er innsatsfaktor sammen med kapital spart av en stor generasjon, og symmetrisk er deres sparing innsatsfaktor sammen arbeidskraft fra en stor generasjon.

I grunnmodellen oppnår derfor en agent tilhørende en liten generasjon høyere livstidsnytte enn en agent tilhørende en stor generasjon. I overført betydning vil det si at personer tilhørende de store fødselskullene i etterkrigstiden kommer relativt dårlig ut i forhold til personer tilhørende mindre fødselskull født tidligere eller senere. I realiteten ser vi at dette ikke gjenspeiler situasjonen i Norge i dag. Det er politisk lettere å øke skattene på den arbeidende delen av befolkningen, enn å redusere nivået på pensjonsutbetalingene Staten allerede har forpliktet seg til. Den store generasjonen forskyver dermed problemet ned på den lille generasjonen.

Hva som er viktig fra denne modellen er dermed ikke først å fremst at agenter tilhørende en liten generasjon kommer dårligere ut, men at relative forskjeller i generasjonsstørrelsene spiller en betydelig rolle. Generasjonsstørrelsene påvirker kapital per arbeid og gir dermed variasjon i avkastning av arbeidskraft og kapital. Dette gjør det fristende å argumentere for mer innvandring for å jevne ut generasjonsstørrelsene og dermed forskjellen i nytte mellom agenter tilhørende forskjellige generasjoner.

3 Modell 2: Tre-periode OLG

I grunnmodellen hvor en agent lever i to perioder er kun en av generasjonene i arbeidsfør alder i hver periode. I den virkelige verdenen består derimot arbeidsstokken av personer fra mange generasjoner. Ved å utvide modellen med at hver agent lever i flere perioder får jeg en modell som ligger nærmere virkeligheten. I denne modellen består arbeidsstokken dermed alltid av en liten og en stor generasjon,[26] og det vil derfor være like mange arbeidere i hver periode. Ved å utvide til tre perioder skapes det interaksjon mellom agenter i modellen.

3.1 Teori

Husholdningene

Jeg utvider grunnmodellen til at agenten lever i tre perioder, som ung, middelaldrende og gammel. Hver periode antas å representere 20 år. Agenten jobber som ung og middelaldrende (første og andre periode), mottar lønn og gjør en sparebeslutning i slutten av begge periodene. Jeg forutsetter videre at en middelaldrende agent er mer produktiv enn en ung agent, og derfor mottar høyere lønn. I tredje og siste periode lever agenten av oppsparte midler og avkastningen av disse. Agentens nyttefunksjon kan skrives som:

$$U(c_t^u, c_{t+1}^m, c_{t+2}^g) = \frac{(c_t^u)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^m\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta^2 \frac{\left(c_{t+2}^g\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}. \tag{12}$$

Beskrankningene agenten står overfor:

$$c_t^u + s_t^u = w_t e^u \tag{13}$$

$$c_{t+1}^m + s_{t+1}^m = (1 + r_{t+1})\, s_t^u + w_{t+1} e^m \tag{14}$$

$$c_{t+2}^g = (1 + r_{t+2})\, s_{t+1}^m. \tag{15}$$

Fra konsumentens førsteordensbetingelser får vi optimalitetsbetingelsene:

$$u'(c_t^u) = \beta (1 + r_{t+1})\, u'\left(c_{t+1}^m\right) \tag{16}$$

$$u'\left(c_{t+1}^m\right) = \beta (1 + r_{t+2})\, u'\left(c_{t+2}^g\right). \tag{17}$$

Tolkningen av disse betingelsene er den samme som i to-periode modellen. I optimum er agenten indifferent mellom det å konsumere en ekstra enhet i periode én(periode to) og den neddiskonterte nytten av å spare denne enheten og konsumere sparing og avkastning i periode to(periode tre).

Betingelsene for optimal sparing (se appendiks D for algebra) er:

$$\begin{aligned} s_t^u &= \frac{(1+\beta)\,\beta w_t e^u - \frac{1}{(1+r_{t+1})} w_{t+1} e^m}{1 + \beta (1+\beta)} \\ &= G^u (r_{t+1}, w_t, w_{t+1}) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} s_{t+1}^m &= \frac{\beta^2 \left(w_{t+1} e^m + (1 + r_{t+1})\, w_t e^u\right)}{1 + \beta (1+\beta)} \\ &= G^m (r_{t+1}, w_t, w_{t+1}). \end{aligned} \tag{19}$$

[26] Siden jeg har forutsatt at annethvert fødselskull er lite og stort.

Bedrifter

Det representative firmaet sin atferd er lik som under grunnmodellen, så avkastning til arbeidskraft (w_t) og kapital (r_t) er fortsatt gitt ved ligning (6) og (7).

Aggregerte ressurs beskrankninger

Aggregert inntektsbeskrankning:

$$Y_t = w_t L_t + (r_t + \delta) K_t \tag{20}$$

Total inntekt fordeles på kapital og arbeidskraft.

Aggregert utgiftsbeskrankning:

$$Y_t = c_t^u N_t + c_t^m N_{t-1} + c_t^g N_{t-2} + K_{t+1} - (1-\delta) K_t \tag{21}$$

Forbruk av ressurser i en tidsperiode t, konsum + investering.

Aggregert produksjonsfunksjon:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = \gamma K_t^{\alpha} \left(N_t e^u + N_{t-1} e^m\right)^{1-\alpha} \tag{22}$$

Kapital akkumulasjon:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= s_t^u N_t + s_t^m N_{t-1} \\ k_{t+1} &= \frac{s_t^u N_t + s_t^m N_{t-1}}{N_{t+1} e^u + N_t e^m} \end{aligned} \tag{23}$$

Likevekt

Likevekt er gitt ved et sett av priser hvor husholdningene og bedriftene ikke ønsker å endre atferd og som klarerer arbeids- og kapitalmarkedene.

1. Individer velger s^u og s^m gitt r, r_1 og w, w_1
2. Bedrifter velger k og l gitt r og w
3. Valget av s^u og s^m, k og l i de aggregerte betingelsene fra ligning (20, 21 og 22) gir r, r_1 og w, w_1

3.2 Numerisk løsning

Parametrisering

Jeg bruker de samme verdiene på parameterne som i grunnmodellen. Jeg setter $e^m = 1,5$ og forutsetter dermed at personer i den siste halvdel av yrkeslivet er 50 % mer produktive enn personer tilhørende første halvdel. I følge Statistisk Sentralbyrå sin statistikk på gjennomsnittlig månedsfortjeneste etter aldersgruppe tjener personer over 40 år i gjennomsnitt 49 % mer enn personer under 40 år.[27]

[27] (SSB 2005)

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 5: Tre periode modellene – Tilegne verdier

$X \leftarrow 20$; `// Antall år`

$\beta \leftarrow 0,6676$; `//` $(\tilde{\beta})^X = 0,6676$

$\delta \leftarrow 0,7897$; `//` $1-(1-\tilde{\delta})^X = 0,7897$

Pseudokode – Algoritme 6: Modell 2,3 og 4 – Tilegne verdier

$e^u \leftarrow 1$; `// Normalisert til 1`

$e^m \leftarrow 1,5$;

$N \leftarrow \begin{bmatrix} 1,5 & 2 \\ 2 & 1,5 \end{bmatrix}$; `// Generasjonsstørrelser`

Pseudokode – Algoritme 7: Modell 2 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp`

repeter

  For en av de to generasjonene annenhver gang ;

  Bruk sparebeslutningene til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,$t+1$ *og* $t+2$;

  $k_t \leftarrow \frac{s^u_{t-1}N_{t-1}+s^m_{t-1}N_{t-2}}{N_t e^u + N_{t-1}e^m}$; `// Ligning (23)`

  $k_{t+1} \leftarrow \frac{s^u_t N_t + s^m_t N_{t-1}}{N_{t+1}e^u + N_t e^m}$; `// Ligning (23)`

  $k_{t+2} \leftarrow k_t$; `// Pga symmetri`

  Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1}, r_{t+2} *og* w_t, w_{t+1};

  $r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+1} - \delta$; `// Ligning (6)`

  $r_{t+2} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+2} - \delta$; `// Ligning (6)`

  $w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_t$; `// Ligning (7)`

  $w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_{t+1}$; `// Ligning (7)`

  Bruk avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid t / $t-1$;

  $s^u_{t/t-1} \leftarrow G^u\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (18)`

  $s^m_{t+1/t} \leftarrow G^m\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (19)`

inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 8: Modell 2 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene;

$c^u_t \leftarrow w_t e^u - s^u_t$; `// Ligning (13)`

$c^m_{t+1} \leftarrow \left(1 + r_{t+1}\right) s^u_t + w_{t+1}e^m - s^m_{t+1}$; `// Ligning (14)`

$c^g_{t+2} \leftarrow \left(1 + r_{t+2}\right) s^m_{t+1}$; `// Ligning (15)`

$U(c^u_t, c^m_{t+1}, c^g_{t+2}) \leftarrow \frac{(c^u_t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c^m_{t+1}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c^g_{t+2}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (12)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Modell 1	Modell 2	
		(1.2)	(2.1)	(2.2)
k	l	0,1416	0,1002	0,0922
	s	0,0920	0,1002	0,1109
r^*	l	0,0185	0,0285	0,0255
	s	0,0094	0,0285	0,0310
we^u	l	0,3475	0,3097	0,3012
	s	0,3009	0,3097	0,3203
we^m	l		0,4645	0,4805
	s		0,4645	0,4518
I	l		0,5743	0,5917
	s		0,5743	0,5655
s^u	l	0,1227	0,0379	0,0212
	s	0,1062	0,0379	0,0527
s^m	l		0,2126	0,2064
	s		0,2126	0,2198
c^u	l	0,2248	0,2717	0,2800
	s	0,1947	0,2717	0,2676
c^m	l		0,3184	0,3092
	s		0,3184	0,3292
c^g	l	0,2125	0,3732	0,3804
	s	0,1406	0,3732	0,3636
$U(c)$	l	**-2,3373**	**-2,5062**	**-2,4874**
	s	**-2,7065**	**-2,5062**	**-2,5110**
Y	l, s	0,7819	1,7418	2,0333

Tabell 2: Resultater fra modell 2

Modell 1.2 – *To-periode modell med ulike generasjonsstørrelser*
Modell 2.1 – *Tre-periode modell med like generasjonsstørrelser*
Modell 2.2 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser*
Forkortelser: we^u, we^m – *effektiv lønn som ung og middelaldrende, I – nåverdi av livstidsinntekt* ($I = w_t e^u + \frac{w_{t+1}e^m}{1+r_{t+1}}$)
Kommentar – *På grunn av symmetrien i modellen oppgir jeg bare renten (r) for første periode for hver av generasjonsstørrelsene. Den renten en agent møter i første periode møter den andre i andre periode.*

3.3 Modellimplikasjoner

Som i grunnmodellene impliserer også denne modellen at de relative generasjonsforskjellene skaper forskjeller. Agenter tilhørende en liten generasjon oppnår høyere livstidsnytte enn agenter tilhørende en stor generasjon, men i denne modellen er de økonomiske mekanismene mer kompliserte. For å enklere kunne tolke prisene som klarerer markedene, kalkulerer jeg også nåverdien av livstidsinntekten til agentene, $I = w_t e^u + \frac{w_{t+1} e^m}{1+r_{t+1}}$. Målt relativt til konsum i første periode er prisen på konsum i siste periode lik for agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene.[28] Prisen på konsum i andre periode er høyere for en agent tilhørende en liten generasjon, siden agenten oppnår en lavere avkastning på sin sparing som ung. Høyere nåverdi av total inntekt øker livstidsnytten, mens høyere pris på konsum i periode to trekker den ned. Nettoeffekten i denne modellen er at en agent tilhørende en liten generasjon oppnår høyere livstidsnytte enn en agent tilhørende en stor generasjon.

Hvis vi altså tar utgangspunkt i en modell med like generasjonsstørrelser og øker størrelsen på den ene generasjonen, vil agenter tilhørende den relativt mindre generasjonen oppnå høyere livstidsnytte.[29] I figur (3a) i appendiks (B) er endringen i livstidsnytten illustrert grafisk. Livstidsnytten til agenter tilhørende en liten generasjon øker, mens livstidsnytten til en agent tilhørende en stor generasjon reduseres. Motsatt vil en utjevning av forskjellen mellom generasjonsstørrelser redusere livstidsnytten for en agent tilhørende den lille generasjonen og øke livstidsnytten til en agent tilhørende den store generasjonen.

[28]Prisen på konsum i siste periode relativt til konsum i første periode er $\frac{1}{1+r_{t+1}} \frac{1}{r_{t+2}}$, som følgelig vil være lik for alle generasjoner.

[29]Gitt den parametriseringen jeg har gjort i denne modellen vil agenter tilhørende den store generasjonen komme dårligere ut opp til en relativt stor generasjonsøkning. Det er mulig å endre parameterverdiene slik at agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene kommer dårligere ut. Videre diskusjon finnes i kapittelet om robust test.

4 Modell 3: Tre-periode OLG med åpne kapitalmarkeder

I denne utvidelsen av modellen vil jeg analysere effekten av åpne kapitalmarkeder på livstidsnytten til de forskjellige generasjonsstørrelsene. Et åpent kapitalmarked betyr at kapital investeres der avkastningen er høyest. Gitt at landet i modellen er en liten åpen økonomi uten påvirkningskraft på det internasjonale rentenivået, vil agenter i forskjellige generasjonsstørrelser stå overfor like rentesatser. Hvis det er en positiv rentedifferanse mellom den innenlandske og internasjonale renten, vil kapital strømme til landet og renten gå ned. Motsatt vil kapital strømme ut av landet hvis det er en negativ rentedifferanse mellom den innenlandske og internasjonale renten. Avkastningen av kapital og arbeidskraft vil derfor være lik for agenter tilhørende en stor og en liten generasjon.

4.1 Teori

Husholdningene

Agenten maksimerer livstidsnytte som i modell 2, (ligning (12)),

$$U(c_t^u, c_{t+1}^m, c_{t+2}^g) = \frac{(c_t^u)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^m\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta^2 \frac{\left(c_{t+2}^g\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

gitt beskrankningene

$$c_t^u + s_t^u + b_t^u = w_t e^u \tag{24}$$

$$c_{t+1}^m + s_{t+1}^m + b_{t+1}^m = (1 + r_{t+1})\, s_t^u + \left(1 + r_{t+1}^i\right) b_t^u + w_{t+1} e^m \tag{25}$$

$$c_{t+2}^g = (1 + r_{t+2})\, s_{t+1}^m + \left(1 + r_{t+2}^i\right) b_{t+1}^u, \tag{26}$$

hvor b_t^u og b_{t+1}^m er sparing/lån i internasjonale kapitalmarkeder som ung og middelaldrende og r_{t+1}^i er den internasjonale renten i tid $t+1$.

Betingelsene for optimal sparing i nasjonale og internasjonale kapitalmarkeder (for algebraisk løsning, se appendiks E):

$$s_t^u = H^u\left(r_{t+1}^i; N_t, N_{t+1}\right) - \frac{N_{t-1}}{N_t} s_t^m \tag{27}$$

$$s_{t+1}^m = H^m\left(r_{t+2}^i; N_t, N_{t+1}, N_{t+2}\right) - \frac{N_{t+1}}{N_t} s_{t+1}^u \tag{28}$$

$$b_t^u = Z^u\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) - s_t^u \tag{29}$$

$$b_{t+1}^m = Z^m\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) - s_{t+1}^m. \tag{30}$$

Aggregert likevektsbetingelse

I likevekt må kapitalbalansen overfor utlandet over tid være lik null. Total investering og lån i internasjonale kapitalmarkeder må derfor utligne hverandre.

$$b_t^u N_t + b_{t+1}^m N_t + b_{t+1}^u N_{t+1} + b_t^m N_{t+1} = 0 \tag{31}$$

4.2 Numerisk løsning

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 9: Modell 3 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp (innenlands)`

$b^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp (internasjonalt)`

$r = (1,04)^X - 1$; `// Initial gjetning på renten`

repeter

    repeter

        For en av de to generasjonene annenhver gang ;

        Bruk sparebeslutning til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,t + 1 ;

        $k_t \leftarrow \frac{s^u_{t-1}N_{t-1}+s^m_{t-1}N_{t-2}}{N_t e^u + N_{t-1}e^m}$; `// Ligning (23)`

        $k_{t+1} \leftarrow \frac{s^u_t N_t + s^m_t N_{t-1}}{N_{t+1}e^u + N_t e^m}$; `// Ligning (23)`

        Bruk kapital per arbeider til å finne w_t, w_{t+1};

        $w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k_t^\alpha$; `// Ligning (7)`

        $w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k_{t+1}^\alpha$; `// Ligning (7)`

        Bruk renten (r), lønn (w_t, w_{t+1}) *og den andre generasjonens sparebeslutning til å finne optimal sparing*;

        $s^u_t \leftarrow H^u\left(r^i_{t+1}; N_t, N_{t+1}\right) - \frac{N_{t-1}}{N_t}s^m_t$; `// Ligning (27)`

        $s^m_{t+1} \leftarrow H^m\left(r^i_{t+2}; N_t, N_{t+1}, N_{t+2}\right) - \frac{N_{t+1}}{N_t}s^u_{t+1}$; `// Ligning (28)`

        $b^u_t \leftarrow Z^u\left(r_{t+1}, r^i_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) - s^u_t$; `// Ligning (29)`

        $b^m_{t+1} \leftarrow Z^m\left(r_{t+1}, r^i_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) - s^m_{t+1}$; `// Ligning (30)`

    inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

    for *Hver av de to generasjonene* **gjør**

        Definer $s^u_t(r), s^m_{t+1}(r)$ *og* $b^u_t(r), b^m_{t+1}(r)$ *som funksjoner av r*

    slutt

    $r \leftarrow$ **roten av**$[b^u_t(r)N_t + b^m_{t+1}(r)N_t + b^u_{t+1}(r)N_{t+1} + b^m_t(r)N_{t+1}]$; `// Ligning (31)`

inntil $|(r - r_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 10: Modell 3 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene;

$c^u_t \leftarrow w_t e^u - s^u_t - b^u_t$; `// Ligning (24)`

$c^m_{t+1} \leftarrow (1 + r_{t+1})\, s^u_t + \left(1 + r^i_{t+1}\right) b^u_t + w_{t+1}e^m - s^m_{t+1} - b^m_{t+1}$; `// Ligning (25)`

$c^g_{t+2} \leftarrow (1 + r_{t+2})\, s^m_{t+1} + \left(1 + r^i_{t+2}\right) b^u_{t+1}$; `// Ligning (26)`

$U(c^u_t, c^m_{t+1}, c^g_{t+2}) \leftarrow \frac{(c^u_t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c^m_{t+1}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c^g_{t+2}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (12)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Modell 2 (2.2)	Modell 3
k	l	0,0922	0,1002
	s	0,1109	0,1002
r^*	l	0,0255	0,0285
	s	0,0310	0,0285
we^u	l	0,3012	0,4645
	s	0,3203	0,4645
we^m	l	0,4805	0,4645
	s	0,4518	0,4645
s^u	l	0,0212	0,0623
	s	0,0527	0,1701
s^m	l	0,2064	0,0738
	s	0,2198	0,1662
b^u	l		-0,0243
	s		-0,1322
b^m	l		0,1388
	s		0,0464
c^u	l	0,2800	0,2717
	s	0,2676	0,2717
c^m	l	0,3092	0,3184
	s	0,3292	0,3184
c^g	l	0,3804	0,3732
	s	0,3636	0,3732
$U(c)$	l	**-2,4874**	**-2,5062**
	s	**-2,5110**	**-2,5062**
Y	l, s	2,0333	2,0477

Tabell 3: Resultater fra modell 3

Modell 2.2 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser*
Modell 3 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser og åpne kapitalmarkeder*
Forkortelser: b^u, b^m – *sparing/lån i internasjonale kapitalmarkeder som ung og middelaldrende*

4.3 Modellimplikasjoner

Simuleringen av denne modellen viser at det er mulig å utligne forskjellene mellom generasjonsstørrelsene ved å åpne for sparing i internasjonale kapitalmarkeder. Samfunnet kan dermed møte de demografiske utfordringene ved at agentene låner av, eller sparer i, internasjonale kapitalmarkeder alt ettersom hva som gir høyest avkastning. Det faktum at man kan spare i utlandet gjør variabelen "forsørgelsesbyrde" irrelevant med hensyn til livstidsnytten agentene oppnår.

I Norge i dag gjøres store pensjonssparinger i de internasjonale kapitalmarkedene gjennom Statens pensjonsfond - Utland. I en lukket økonomi ville dette fondet drevet ned avkastningen av kapital. Ved å investere i utlandet oppnår man i stedet avkastningen i de internasjonale kapitalmarkedene.

5 Åpne arbeidsmarkeder

Antagelsen om åpne kapitalmarkeder endret implikasjonene av modellen. De internasjonale kapitalbevegelsene utligner forskjellen ulike generasjonsstørrelser ellers ville gitt i kapital per arbeider, slik at avkastningen av arbeidskraft og kapital vil være lik for alle generasjoner. Den virkelige verdenen er ikke like friksjonssløs som modellverdenen. Å si at dette løser alle problemer, er derfor å trekke implikasjonene av modellen for langt. Fremdeles impliserer modellen at en utjevning av generasjonsstørrelsene har en betydelig mindre effekt når vi åpner for internasjonale kapitalmarkeder. Jeg vil nå åpne opp arbeidsmarkedene for å analysere effekten av innvandring av lavt utdannede personer. I disse modellene forutsettes ikke lenger åpne kapitalmarkeder, slik at vi får isolert effekten av innvandring. Resultater blir derfor enklere å analysere, uten at vi mister noe kvalitativt viktig.[30]

Innvandring i Norge består i stor grad av lavt utdannede arbeidere.[31] For å analysere denne problemstillingen ønsker jeg derfor å gjøre et sett av utvidelser. Jeg introduserer heterogene agenter og et løpende finansiert pensjonssystem for å modellere overføringer mellom generasjoner og mellom lavt og høyt utdannede personer. Deretter forutsetter jeg at fri flyt av arbeidskraft skjer gjennom innvandring inn i den relativt mindre generasjonen. Til slutt kombineres disse utvidelsene for å analysere effekten av innvandring på høyt og lavt utdannede agenter i generasjoner med forskjellig størrelse. Jeg ønsker å utvide modellen stegvis for lettere å kunne tolke resultatene fra en mer kompleks modell. Modellene følger samme struktur som i grunnmodellen og de tidligere modellene.

5.1 Modell 4: Tre-periode OLG med løpende finansiering av pensjonsordningen

Ved løpende finansiering av pensjonsordningen finansieres utbetalingene hvert år av innbetalinger samme år.[32] I Norge består alderspensjonen av grunnpensjon og tilleggspensjon. Full grunnpensjon ytes til den som har minst 40 års trygdetid, mens tilleggspensjonen skal stå i forhold til den pensjonsgivende inntekten en person hadde som yrkesaktiv.[33] [34]

Jeg forutsetter i denne modellen at agenter tilhørende den samme generasjonen mottar lik pensjon, og at alle skattlegges med lik skattesats. Dette pensjonssystemet har derfor et definert skattetrykk, mens utbetalingene varierer med hvor stort bidraget er fra den arbeidende delen av befolkningen hver periode. Hvor godt denne modelleringen fanger realitetene av det norske systemet avhenger av hvordan vi velger å løse fremtidens utfordringer. Om man velger å holde pensjonsutbetalingene på samme nivå for pesjonister i 2050, vil dette mest sannsynlig innebære at skattesatsen må justeres for å dekke et

[30] I en modell med åpne kapitalmarkeder, vil likt utdannede agenter tilhørende forskjellige generasjonsstørrelser oppnå lik livstidsnytte. Et pensjonssystem vil dermed kun omfordele velferd mellom høyt og lavt utdannede agenter.

[31] (SSB 2008*e*)

[32] Denne måten å finansiere pensjonsordningen på kalles også utlikningssystem eller "pay-as-you-go" system.

[33] (NAV 2009*a*)

[34] En person som ikke har opptjent tilleggspensjon, eller har en tileggspensjonen som er lavere en særtillegget får et særtillegg. Full grunnpensjon og særtillegg tilsvarer minstepensjon.(NAV 2009*a*)

definert utgiftsnivå, og en relativt mindre generasjon vil da ha en høyere skattesats enn en stor. Jeg forutsetter allikevel en fast skattesats, både fordi det er modellteknisk lettere og fordi dette er tilstrekelig for å få en fordelingseffekt mellom lavt og høyt utdannet arbeidskraft. Når vi sammenligner generasjoner må vi derfor ha i bakhodet at forskjeller kan bli reversert med et anderledes system.

5.1.1 Teori

Husholdningene

Agenten maksimerer livstidsnytte som i modell 2, ligning (12),

$$U(c_t^u, c_{t+1}^m, c_{t+2}^g) = \frac{\left(c_t^u\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^m\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta^2 \frac{\left(c_{t+2}^g\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

gitt beskrankningene

$$c_t^u + s_t^u = (1-\tau) w_t e^u \tag{32}$$

$$c_{t+1}^m + s_{t+1}^m = (1 + r_{t+1})\, s_t^u + (1-\tau) w_{t+1} e^m \tag{33}$$

$$c_{t+2}^g = (1 + r_{t+2})\, s_{t+1}^m + p_{t+2}, \tag{34}$$

hvor p_{t+2} er pensjonsutbetalingen for individer som er pensjonister i tid $t+2$, gitt ved:

$$p_t = \frac{N_t \tau w_t e^u + N_{t-1} \tau w_t e^m}{N_{t-2}}. \tag{35}$$

Optimal sparing (se appendiks F for utregning) er gitt ved:

$$s_t^u = I^u\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right) \tag{36}$$

$$s_{t+1}^m = I^m\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right). \tag{37}$$

5.1.2 Numerisk løsning

Parametrisering

Folketrygdens inntekter kommer fra trygdeavgiften og arbeidsgiveravgiften. I 2007 utgjorde trygdeavgiften 40,6 % av inntektene og arbeidsgiveravgiften de resterende 59,4 %.[35] Trygdeavgiften er i Norge på 7,8 %[36] av pensjonsinntekten. Arbeidsgiveravgiften varierer med hvor bedriften er lokalisert, men med utgangspunkt i trygdeavgiften estimer jeg den til å være gjennomsnittlig $\frac{59{,}5\%}{40{,}6\%} \cdot 7,8\% = 11,4\%$. I 2007 var Folketrygdens utgifter 247,2 milliarder, av dette utgjorde alderspensjonen 39,3 %.[37] Den skattesatsen på personinntekt som gir tilsvarende inntekt som utgiftene til alderspensjonen er dermed $39,36\% \cdot (11,4\% + 7,8\%) = 7,54\%$. Jeg velger derfor å sette skattesatsen for pensjon τ lik 10 %.

[35](SSB 2007*b*)
[36](NAV 2008)
[37](SSB 2007*a*)

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 11: Modell 4 – Tilegne verdier

$\tau \leftarrow 0,1$; `// Skattesats`

Pseudokode – Algoritme 12: Modell 4 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp`

repeter

For en av de to generasjonene annenhver gang ;

Bruk sparebeslutningene til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,$t+1$ *og* $t+2$;

$k_t \leftarrow \frac{s^u_{t-1}N_{t-1}+s^m_{t-1}N_{t-2}}{N_t e^u + N_{t-1}e^m}$; `// Ligning (23)`

$k_{t+1} \leftarrow \frac{s^u_t N_t + s^m_t N_{t-1}}{N_{t+1}e^u + N_t e^m}$; `// Ligning (23)`

$k_{t+2} \leftarrow k_t$; `// Pga symmetri`

Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1}, r_{t+2} *og* w_t, w_{t+1};

$r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+1} - \delta$; `// Ligning (6)`

$r_{t+2} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+2} - \delta$; `// Ligning (6)`

$w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_t$; `// Ligning (7)`

$w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_{t+1}$; `// Ligning (7)`

Bruk w_t *og* w_t *til å finne verdien på pensjonsutbetalingen*;

$p_t \leftarrow \frac{N_t \tau w_t e^u + N_{t-1}\tau w_t e^m}{N_{t-2}}$; `// Ligning (6)`

$p_{t+2} \leftarrow p_t$; `// Pga symmetri`

Bruk pensjonsutbetalingen, avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid t / $t-1$;

$s^u_{t/t-1} \leftarrow I^u\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right)$; `// Ligning (36)`

$s^m_{t+1/t} \leftarrow I^m\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right)$; `// Ligning (37)`

inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 13: Modell 4 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene;

$c^u_t \leftarrow (1-\tau)w_t e^u - s^u_t$; `// Ligning (32)`

$c^m_{t+1} \leftarrow (1+r_{t+1})\, s^u_t + (1-\tau)w_{t+1}e^m - s^m_{t+1}$; `// Ligning (33)`

$c^g_{t+2} \leftarrow (1+r_{t+2})\, s^m_{t+1} + p_{t+2}$; `// Ligning (34)`

$U(c^u_t, c^m_{t+1}, c^g_{t+2}) \leftarrow \frac{(c^u_t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c^m_{t+1}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c^g_{t+2}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (12)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Modell 2 (2.2)	Modell 4
k	l	0,0922	0,0641
	s	0,1109	0,0757
r^*	l	0,0255	0,0371
	s	0,0310	0,0423
we^u	l	0,3012	0,2668
	s	0,3203	0,2820
we^m	l	0,4805	0,4229
	s	0,4518	0,4003
I	l	0,5917	0,4406
	s	0,5655	0,4236
s^u	l	0,0212	0,0317
	s	0,0527	0,0533
s^m	l	0,2064	0,1213
	s	0,2198	0,1370
c^u	l	0,2800	0,2085
	s	0,2676	0,2005
c^m	l	0,3092	0,3251
	s	0,3292	0,3454
c^g	l	0,3804	0,3579
	s	0,3636	0,3440
p_{t+2}	l		0,0801
	s		0,0599
$U(c)$	l	**-2,4874**	**-2,7761**
	s	**-2,5110**	**-2,7925**
Y	l, s	2,0333	1,8012

Tabell 4: Resultater fra modell 4

Modell 2.2 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser*
Modell 4.1 – *Tre-periode modell med like generasjonsstørrelser og et pensjonssystem*
Modell 4.2 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser og et pensjonssystem*
Forkortelse: p_{t+2} – *pensjonsutbetaling for en agent født i tid t, I – nåverdi av livstidsinntekt* $(I = w_t e^u + \frac{w_{t+1}e^m}{1+r_{t+1}} + \frac{p_{t+2}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})})$

5.1.3 Modellimplikasjoner

Hvis vi sammenligner en økonomi med og uten et løpende finansiert pensjonssystem, ser vi at pensjonsskatten og pensjonsutbetalingen vrir prisene slik at agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene oppnår en lavere livstidsnytte. Agenter tilhørende en liten generasjon oppnår også i denne modellen høyere livstidsnytte enn agenter tilhørende de store. I den virkelige verdenen er pensjon blant annet en inntektsforsikring hvis man blir veldig gammel. I denne enkle modellen er aspekter som risiko og myopi ikke tatt med, så modellen har begrensede implikasjoner for pensjonssystemer generelt, men er en byggesten i senere modeller.

5.2 Modell 5: Tre-periode OLG med heterogene agenter

I stor grad består innvandringen til Norge av personer med lav utdanning.[38] Det er derfor interessant å utvide modellen med heterogene agenter for å analysere effekten av innvandring på høyt og lavt utdannede arbeidere. Jeg forutsetter at agenter enten er lavt eller høyt utdannet, men at agentene ellers er like. En høyt utdannet arbeider er mer produktiv enn en lavt utdannet arbeider og skaper dermed mer verdi per arbeidstime. Høyt utdannede agenter mottar derfor høyere lønn enn lavt utdannet agenter i samme periode i livet.

5.2.1 Teori

Husholdningene

Agenten maksimerer livstidsnytte som i modell 2, ligning (12),

$$U(c_t^{ui}, c_{t+1}^{mi}, c_{t+2}^{gi}) = \frac{\left(c_t^{ui}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^{mi}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta^2 \frac{\left(c_{t+2}^{gi}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

gitt beskrankningene

$$c_t^{ui} + s_t^{ui} = (1-\tau) w_t e^{ui} \tag{38}$$

$$c_{t+1}^{mi} + s_{t+1}^{mi} = (1 + r_{t+1}) s_t^{ui} + (1-\tau) w_{t+1} e^{mi} \tag{39}$$

$$c_{t+2}^{gi} = (1 + r_{t+2}) s_{t+1}^{mi}, \tag{40}$$

hvor i indikerer om agenten er lavt produktiv ($i = L$) eller høyt produktiv ($i = H$).

Optimal sparing:

$$s_t^{ui} = \frac{(1+\beta)\beta w_t e^{ui} - \frac{1}{(1+r_{t+1})} w_{t+1} e^{mi}}{1 + \beta(1+\beta)} = G^{ui}(r_{t+1}, w_t, w_{t+1}) \tag{41}$$

$$s_{t+1}^{mi} = \frac{\beta^2 \left(w_{t+1} e^{mi} + (1 + r_{t+1}) w_t e^{ui}\right)}{1 + \beta(1+\beta)} = G^{mi}(r_{t+1}, w_t, w_{t+1}). \tag{42}$$

Andelen lavt utdannede arbeidere født i tid t er gitt ved $N_t^L = n \cdot N_t$ og andelen høyt utdannede $N_t^H = (1-n) \cdot N_t$. I modell 2 og ligning (23) var uttrykket for kapital per arbeider $k_{t+1} = \frac{s_t^u N_t + s_t^m N_{t-1}}{N_{t+1} e^u + N_t e^m}$, så med heterogenitet, hvor n indikerer andel lavt utdannede personer, blir dette:

$$k_{t+1} = \frac{N_t \left(n s_t^{uL} + (1-n) s_t^{uH}\right) + N_{t-1} \left(n s_t^{mL} + (1-n) s_t^{mH}\right)}{N_{t+1} \left(n e^{uL} + (1-n) e^{uH}\right) + N_t \left(n e^{mL} + (1-n) e^{mH}\right)}. \tag{43}$$

[38] (SSB 2008e)

5.2.2 Numerisk løsning

Parametrisering

I følge Statistisk Sentralbyrå sin statistikk for 2007 har 70,87 % av personer over 16 år i Norge utdannelse på grunnskole- og videregåendeskolenivå, 24,78 % på universitets- og høgskolenivå og 4,35 % er oppført som "uoppgitt eller ingen fullført utdanning".[39] Jeg setter derfor parameteren som indikerer andel lavt utdannede til 70 %.

Ifølge lønnsstatistikken til Statistisk Sentralbyrå for 2007 tjener ansatte i de høytlønnede næringene 81 % mer enn personer i lavtlønnede næringer.[40] [41] [42]

Hvis vi ser på lønnsstatistikken for 2005 var gjennomsnittlig lønn for personer med mer enn 4 års utdannelse 64,8 % høyere enn for personer med kun grunnskoleutdannelse og 52,7 % høyere enn for personer med høyeste utdannelse fra videregåendeskolenivå.[43] Jeg velger derfor å sette produktiviteten til en ung og lavt utdannet arbeider til 0,7 og produktiviteten til en ung og høyt utdannet til 1,15. Tilsvarene setter jeg effektivitetsparameteren til en middelaldrende lavt utdannet lik 1,05 og høyt utdannet 1,7.

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 14: Modell 5,6 og 7 – Tilegne verdier

$e^{uL} \leftarrow 0,7$;
$e^{uH} \leftarrow 1,15$;
$e^{mL} \leftarrow 1,05$;
$e^{mH} \leftarrow 1,7$;

Pseudokode – Algoritme 15: Modell 5 – Tilegne verdier

$n \leftarrow 0,7$; `// Andel lavt utdannede`
$N \leftarrow \begin{bmatrix} 1,5 & 2 \\ 2 & 1,5 \end{bmatrix}$; `// Generasjonsstørrelser`

[39] Emne: 04 Utdanning, Tabell: 06983: Personer 16 år og over, etter kjønn og befolkningens utdanningsnivå (ny nivåinndeling) (K)
[40] Høytlønnede næringer: Olje- og gassutvinning og bergverksdrift, Kraftforsynin, Finanstjeneste og Eiendomsdrift, forretningsmessig tjenesteyting
[41] Lavtlønnede næringer: Fiskeoppdrett, Industri, Bygge- og anleggsvirksomhet, Varehandel, Hotell- og restaurantvirksomhet, Samferdsel, Staten, Undervisningspersonale i skoleverket, Kommune og fylkeskommune, Privat undervisning, Helse- og sosialtjenester, Statlige sykehustjenester og Sosiale og personlige tjenester
[42] (SSB 2008*c*)
[43] (SSB 2008*b*)

Pseudokode – Algoritme 16: Modell 5 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp`

repeter

For en av de to generasjonene annenhver gang ;

Bruk sparebeslutningene til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,$t+1$ *og* $t+2$;

$k_t \leftarrow \frac{N_{t-1}\left(ns^{uL}_{t-1}+(1-n)s^{uH}_{t-1}\right)+N_{t-2}\left(ns^{mL}_{t-1}+(1-n)s^{mH}_{t-1}\right)}{N_t(ne^{uL}+(1-n)e^{uH})+N_{t-1}(ne^{mL}+(1-n)e^{mH})}$; `// Ligning (43)`

$k_{t+1} \leftarrow \frac{N_t\left(ns^{uL}_{t}+(1-n)s^{uH}_{t}\right)+N_{t-1}\left(ns^{mL}_{t}+(1-n)s^{mH}_{t}\right)}{N_{t+1}\leftarrow(ne^{uL}+(1-n)e^{uH})+N_t(ne^{mL}+(1-n)e^{mH})}$; `// Ligning (43)`

$k_{t+2} \leftarrow k_t$; `// Pga symmetri`

Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1}, r_{t+2} *og* w_t, w_{t+1};

$r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+1} - \delta$; `// Ligning (6)`

$r_{t+2} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+2} - \delta$; `// Ligning (6)`

$w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_{t}$; `// Ligning (7)`

$w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_{t+1}$; `// Ligning (7)`

Bruk avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid t / $t-1$;

for *Lavt og Høyt utdannet arbeidskraft* **gjør**

$s^{ui}_{t/t-1} \leftarrow G^{ui}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (41)`

$s^{mi}_{t+1/t} \leftarrow G^{mi}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (42)`

slutt

inntil $|(k - k_{-1})| <$ *kriterie og* $|(k1 - k1_{-1})| <$ *kriterie* ;

Pseudokode – Algoritme 17: Modell 5 - Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene og for høyt og lavt utdannet arbeidskraft;

$c^{ui}_t \leftarrow w_t e^{ui} - s^{ui}_t$; `// Ligning (38)`

$c^{mi}_{t+1} \leftarrow (1 + r_{t+1})\, s^{ui}_t + w_{t+1}e^{mi} - s^{mi}_{t+1}$; `// Ligning (39)`

$c^{gi}_{t+2} \leftarrow (1 + r_{t+2})\, s^{mi}_{t+1}$; `// Ligning (40)`

$U(c^{ui}_t, c^{mi}_{t+1}, c^{gi}_{t+2}) \leftarrow \frac{\left(c^{ui}_t\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c^{mi}_{t+1}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c^{gi}_{t+2}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (5.2.1)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Modell 5	
		L	H
k	l	0,0926	0,0926
	s	0,1112	0,1112
r^*	l	0,0254	0,0254
	s	0,0309	0,0309
we^u	l	0,2111	0,3469
	s	0,2244	0,3687
we^m	l	0,3366	0,5451
	s	0,3167	0,5128
I	l	0,4150	0,5507
	s	0,3967	0,5410
s^u	l	0,0148	0,0266
	s	0,0367	0,0623
s^m	l	0,1445	0,2358
	s	0,1538	0,2511
c^u	l	0,1964	0,3203
	s	0,1877	0,3064
c^m	l	0,2165	0,3532
	s	0,2304	0,3761
c^g	l	0,2658	0,4335
	s	0,2540	0,4147
$U(c)$	l	**-3,2399**	**-2,2059**
	s	**-3,2636**	**-2,2278**
Y	l, s	1,6933	1,6933

Tabell 5: Resultater fra modell 5

Modell 5 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser og heterogene agenter*

5.2.3 Modellimplikasjoner

Resultatene av denne modellen gir de samme kvalitative resultatene om livstidsnytte basert på generasjonsstørrelser som den enkle 3 perioders modellen. En agent tilhørende en liten generasjon kommer bedre ut enn en agent tilhørende en stor generasjon med lik utdanning. Som intuitivt forventet oppnår en høyt utdannet/produktiv agent høyere livstidsnytte en lavt utdannet/produktiv agent.

5.3 Modell 6: Tre-periode OLG med innvandring

Jeg forutsetter i denne modellen at gapet i antall personer mellom en liten og en stor generasjon dekkes gjennom import av lavt utdannet arbeidskraft. Denne modellen blir dermed langt på vei lik modell 5, men skiller seg fra den ved at andelen lavt utdannet/produktiv arbeidskraft er større i en liten generasjon. Jeg ønsker å benytte meg av denne modellen for å analysere effekten av innvandring på de forskjellige gruppene i økonomien, lavt og høyt utdannende agenter. Jeg forutsetter at innvandringen ikke øker størrelsen på den etterfølgende generasjonen. Det vil si at jeg forutsetter at innvandrere blir i Norge hele livet, men ikke bidrar til å endre størrelsen på de etterfølgende generasjonene.[44]

5.3.1 Teori

Agentene står overfor de samme beskrankningene som i modell 5, men generasjonene vil ha forskjellig andel lavt og høyt utdannede personer. La n_t indikere antall lavt utdannede i generasjonen født i tid t. Utrykket for kapital per arbeider kan da skrives:

$$k_{t+1} = \frac{N_t\left(n_t s_t^{uL} + (1-n_t) s_t^{uH}\right) + N_{t-1}\left(n_{t-1} s_t^{mL} + (1-n_{t-1}) s_t^{mH}\right)}{N_{t+1}\left(n_{t+1} e^{uL} + (1-n_{t+1}) e^{uH}\right) + N_t\left(n_t e^{mL} + (1-n_t) e^{mH}\right)}. \tag{44}$$

5.3.2 Numerisk løsning

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 18: Modell 6 – Tilegne verdier

$n_t \leftarrow 0,8$; `// Andel lavt utdannede`

$n_{t+1} \leftarrow 0,7$; `// Andel lavt utdannede`

$n_{t+2} \leftarrow n_t$; `// Pga symmetri`

$N \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; `// Generasjonsstørrelser`

[44] Denne antagelsen gjør jeg først å fremst for å forenkle modellen. Om man forutsetter at innvandrere bidrar til befolkningsvekst i den påfølgende generasjonen vil først den store generasjonen øke i størrelse, dette vil igjen øke størrelsen på den etterfølgende lille generasjonen. Den demografiske utviklingen modellen kompliseres med liten virking på modellen og dens implikasjoner

Pseudokode – Algoritme 19: Modell 6 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp`
repeter
    For en av de to generasjonene annenhver gang ;
    Bruk sparebeslutningene til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,$t+1$ *og* $t+2$;
    $k_t \leftarrow \frac{N_{t-1}\left(n_{t-1}s^{uL}_{t-1}+(1-n_{t-1})s^{uH}_{t-1}\right)+N_{t-2}\left(n_{t-2}s^{mL}_{t}+(1-n_{t-2})s^{mH}_{t-1}\right)}{N_t(n_t e^{uL}+(1-n_t)e^{uH})+N_{t-1}(n_{t-1}e^{mL}+(1-n_{t-1})e^{mH})}$; `// Ligning (44)`
    $k_{t+1}\frac{N_t\left(n_t s^{uL}_t+(1-n_t)s^{uH}_t\right)+N_{t-1}\left(n_{t-1}s^{mL}_t+(1-n_{t-1})s^{mH}_t\right)}{N_{t+1}(n_{t+1}e^{uL}+(1-n_{t+1})e^{uH})+N_t(n_t e^{mL}+(1-n_t)e^{mH})}$; `// Ligning (44)`
    $k_{t+2} \leftarrow k_t$; `// Pga symmetri`
    Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1}, r_{t+2} *og* w_t, w_{t+1};
    $r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+1} - \delta$; `// Ligning (6)`
    $r_{t+2} \leftarrow \alpha\gamma k^{\alpha-1}_{t+2} - \delta$; `// Ligning (6)`
    $w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_t$; `// Ligning (7)`
    $w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k^{\alpha}_{t+1}$; `// Ligning (7)`
    Bruk avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid t / $t-1$;
    for *Lavt og Høyt utdannet arbeidskraft* **gjør**
        $s^{ui}_{t/t-1} \leftarrow G^{ui}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (41)`
        $s^{mi}_{t+1/t} \leftarrow G^{mi}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right)$; `// Ligning (42)`
    slutt
inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 20: Modell 6 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene og for høyt og lavt utdannet arbeidskraft;
$c^{ui}_t \leftarrow w_t e^{ui} - s^{ui}_t$; `// Ligning (38)`
$c^{mi}_{t+1} \leftarrow (1 + r_{t+1})\, s^{ui}_t + w_{t+1}e^{mi} - s^{mi}_{t+1}$; `// Ligning (39)`
$c^{gi}_{t+2} \leftarrow (1 + r_{t+2})\, s^{mi}_{t+1}$; `// Ligning (40)`
$U(c^{ui}_t, c^{mi}_{t+1}, c^{gi}_{t+2}) \leftarrow \frac{\left(c^{ui}_t\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c^{mi}_{t+1}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c^{gi}_{t+2}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (5.2.1)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

Fødselskull		Modell 5		Modell 6.1		Modell 6.2	
		L	H	L	H	L	H
k	l	0,0926	0,0926	0,1006	0,1006	0,0980	0,0980
	s	0,1112	0,1112	0,1006	0,1006	0,1032	0,1032
r^*	l	0,0254	0,0254	0,0284	0,0284	0,0277	0,0277
	s	0,0309	0,0309	0,0284	0,0284	0,0292	0,0292
we^u	l	0,2111	0,3469	0,2170	0,3565	0,2152	0,3535
	s	0,2244	0,3687	0,2170	0,3565	0,2189	0,3596
we^m	l	0,3366	0,5451	0,3255	0,5270	0,3283	0,5315
	s	0,3167	0,5128	0,3255	0,5270	0,3227	0,5225
I	l	0,4150	0,5507	0,4028	0,6574	0,4054	0,6615
	s	0,3967	0,5410	0,4028	0,6574	0,4003	0,6534
s^u	l	0,0148	0,0266	0,0264	0,0455	0,0233	0,0405
	s	0,0367	0,0623	0,0264	0,0455	0,0294	0,0504
s^m	l	0,1445	0,2358	0,1488	0,2429	0,1475	0,2408
	s	0,1538	0,2511	0,1488	0,2429	0,1502	0,2451
c^u	l	0,1964	0,3203	0,1906	0,3111	0,1918	0,3130
	s	0,1877	0,3064	0,1906	0,3111	0,1894	0,3092
c^m	l	0,2165	0,3532	0,2229	0,3638	0,2210	0,3606
	s	0,2304	0,3761	0,2229	0,3638	0,2249	0,3671
c^g	l	0,2658	0,4335	0,2607	0,4255	0,2624	0,4281
	s	0,2540	0,4147	0,2607	0,4255	0,2591	0,4229
$U(c)$	l	**-3,2399**	**-2,2059**	**-3,2587**	**-2,2238**	**-3,2552**	**-2,2205**
	s	**-3,2636**	**-2,2278**	**-3,2587**	**-2,2238**	**-3,2617**	**-2,2265**
Y	l, s	1,6933	1,6933	1,9345	1,9345	1,8558	1,8558

Tabell 6: Resultater fra modell 6

Modell 5 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser og heterogene agenter*
Modell 6.1 – *Tre-periode modell med like generasjonsstørrelser, heterogene agenter og en lik andel av lavt utdannede i begge generasjonene*
Modell 6.2 – *Tre-periode modell med like generasjonsstørrelser, heterogene agenter og en større andel lavt utdannede i generasjonen med innvandrere*

5.3.3 Modellimplikasjoner

Med utgangspunkt i ulike generasjonsstørrelser og innvandring som dekker gapet mellom størrelsene på generasjonene vil både lavt og høyt utdannede agenter i en "liten" generasjon komme dårligere ut, sammenlignet med situasjonen uten innvandring. Agentene i en "stor" generasjon vil oppleve at livstidsnytten øker. Denne endringen forårsakes av to effekter. Den første er den vi så i modell 2, hvor livstidsnytten for agenter tilhørende en liten generasjon reduseres når vi går fra en situasjon med ulike til like generasjonsstørrelser, mens agenter tilhørende en stor generasjon opplever en forbedring. Denne effekten er også illustrert grafisk i figur (3a) i appendiks (B).

Den andre effekten er at generasjonen som mottar innvandrende vil ha en høyere andel lavt utdannede. Både høyt og lavt utdannede agenter i denne generasjonen vil oppnå høyere livstidsnytte på grunn av dette, mens agenter i generasjonen med en høy andel høyt utdannede vil få redusert livstidsnytten. Denne effekten er symmetrisk med effekten av en endring i generasjonsstørrelser, bare at vi nå ser på antall effektive arbeidere. Hvis vi tar utgangspunkt i en modell med like mange effektive arbeidere (modell 6.1) og øker andelen lavt utdannende i en generasjon, vil denne generasjonen oppleve en reduksjon i antall effektive arbeidere, og dermed en økning i livstidsnytten.

Den totale effekten av innvandring er negativ for agenter tilhørende en generasjon som opplever innvandring, og positiv for de andre generasjonene, hvilket betyr at effekten av en utjevning i generasjonsstørrelser dominerer.

5.4 Modell 7: Tre-periode OLG med løpende finansiering av pensjonsordningen og heterogene agenter

Jeg vil kombinere modell 4,5 og 6 for å analysere effekten av økt innvandring av lavt (og høyt) utdannet arbeidskraft på livstidsnytten til agentene tilhørende en liten og stor generasjon. Siden pensjonsutbetalingene finansieres løpende med skatter på inntekt, vil økt innvandring av lavt utdannet arbeidskraft bidra positivt til gjennomsnittlige pensjonsinnbetalinger ved at det er flere personer å skattlegge, men negativt ved at lavt utdannet arbeidskraft bidrar mindre til pensjonskassen enn høyt utdannet arbeidskraft.

En person som har bodd i Norge i 40 år har krav på full grunnpensjon.[45] I modellen tilsvarer dette at en innvandrende agent har krav på pensjon når han har jobbet i to perioder.

5.4.1 Teori

Husholdningene

Agenten maksimerer livstidsnytte som i modell 2, ligning (12),

$$U(c_t^{ui}, c_{t+1}^{mi}, c_{t+2}^{gi}) = \frac{\left(c_t^{ui}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta\frac{\left(c_{t+1}^{mi}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta^2\frac{\left(c_{t+2}^{gi}\right)^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

gitt beskrankningene

$$c_t^{ui} + s_t^{ui} = (1-\tau)w_t e^{ui} \tag{45}$$

$$c_{t+1}^{mi} + s_{t+1}^{mi} = (1+r_{t+1})\, s_t^{ui} + (1-\tau)w_{t+1}e^{mi} \tag{46}$$

$$c_{t+2}^{gi} = (1+r_{t+2})\, s_{t+1}^{mi} + p_{t+2}, \tag{47}$$

hvor i indikerer om agenten er lavt produktiv ($i = L$) eller høyt produktiv ($i = H$) og hvor p_t er pensjonsutbetalingen for individer som er pensjonister i tid t, som er gitt ved:

$$p_t = \frac{N_t \tau w_t \left(ne^{uL} + (1-n)e^{uH}\right) + N_{t-1}\tau w_t \left(ne^{mL} + (1-n)e^{mH}\right)}{N_{t-2}}. \tag{48}$$

[45](NAV 2009*a*)

Optimal sparing er symmetrisk med modell 5 og 6 gitt ved:

$$s_t^{ui} = G^{ui}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t e^{ui}, w_{t+1} e^{mi}, p_{t+2}\right) \tag{49}$$

$$s_{t+1}^{mi} = G^{mi}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t e^{ui}, w_{t+1} e^{mi}, p_{t+2}\right). \tag{50}$$

5.4.2 Numerisk løsning

Pseudokode

Pseudokode – Algoritme 21: Modell 7 – Tilegne verdier

$n_t \leftarrow 0,8$; `// Andel lavt utdannede`
$n_{t+1} \leftarrow 0,7$; `// Andel lavt utdannede`
$n_{t+2} \leftarrow n_t$; `// Pga symmetri`
$N \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; `// Generasjonsstørrelser`
$\tau \leftarrow 0,1$; `// Skattesats`

Pseudokode – Algoritme 22: Modell 7 – Simulering

$s^u \leftarrow \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$; `// Initial gjetning på sparebeløp`
repeter
  For en av de to generasjonene annenhver gang ;
  Bruk sparebeslutningene til den andre generasjonen til å finne kapital per arbeider i t,$t+1$ *og* $t+2$;
  $k_t \leftarrow \frac{N_{t-1}\left(n_{t-1}s_{t-1}^{uL}+(1-n_{t-1})s_{t-1}^{uH}\right)+N_{t-2}\left(n_{t-2}s_t^{mL}+(1-n_{t-2})s_{t-1}^{mH}\right)}{N_t(n_t e^{uL}+(1-n_t)e^{uH})+N_{t-1}(n_{t-1}e^{mL}+(1-n_{t-1})e^{mH})}$; `// Ligning (44)`
  $k_{t+1} \leftarrow \frac{N_t\left(n_t s_t^{uL}+(1-n_t)s_t^{uH}\right)+N_{t-1}\left(n_{t-1}s_t^{mL}+(1-n_{t-1})s_t^{mH}\right)}{N_{t+1}(n_{t+1}e^{uL}+(1-n_{t+1})e^{uH})+N_t(n_t e^{mL}+(1-n_t)e^{mH})}$; `// Ligning (44)`
  $k_{t+2} \leftarrow k_t$; `// Pga symmetri`
  Bruk kapital per arbeider til å finne r_{t+1}, r_{t+2} *og* w_t, w_{t+1};
  $r_{t+1} \leftarrow \alpha\gamma k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta$; `// Ligning (6)`
  $r_{t+2} \leftarrow \alpha\gamma k_{t+2}^{\alpha-1} - \delta$; `// Ligning (6)`
  $w_t \leftarrow (1-\alpha)\gamma k_t^{\alpha}$; `// Ligning (7)`
  $w_{t+1} \leftarrow (1-\alpha)\gamma k_{t+1}^{\alpha}$; `// Ligning (7)`
  Bruk w_t *og* w_t *til å finne verdien på pensjonsutbetalingen*;
  $p_t \leftarrow \frac{N_t\tau w_t\left(ne^{uL}+(1-n)e^{uH}\right)+N_{t-1}\tau w_t\left(ne^{mL}+(1-n)e^{mH}\right)}{N_{t-2}}$; `// Ligning (48)`
  $p_{t+2} \leftarrow p_t$; `// Pga symmetri`
  Bruk pensjonsutbetalingen, avkastningen av kapital og arbeidskraft til å finne optimal sparing for generasjon født i tid t / $t-1$;
  for *Lavt og Høyt utdannet arbeidskraft* **gjør**
    $s_{t/t-1}^{ui} \leftarrow G^{ui}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t e^{ui}, w_{t+1}e^{mi}, p_{t+2}\right)$; `// Ligning (49)`
    $s_{t+1/t}^{mi} \leftarrow G^{mi}\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t e^{ui}, w_{t+1}e^{mi}, p_{t+2}\right)$; `// Ligning (50)`
  slutt
inntil $|(k - k_{-1})| < kriterie$ *og* $|(k1 - k1_{-1})| < kriterie$;

Pseudokode – Algoritme 23: Modell 7 – Kalkuler nøkkelverdier

for begge generasjonsstørrelsene og for høyt og lavt utdannet arbeidskraft;
$c_t^{ui} \leftarrow (1-\tau) w_t e^{ui} - s_t^{ui}$; `// Ligning (45)`
$c_{t+1}^{mi} \leftarrow (1+r_{t+1})\, s_t^{ui} + (1-\tau) w_{t+1} e^{mi} - s_{t+1}^{mi}$; `// Ligning (46)`
$c_{t+2}^{gi} \leftarrow (1+r_{t+2})\, s_{t+1}^{mi} + p_{t+2}$; `// Ligning (47)`
$U(c_t^{ui}, c_{t+1}^{mi}, c_{t+2}^{gi}) \leftarrow \frac{\left(c_t^{ui}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta \frac{\left(c_{t+1}^{mi}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \beta^2 \frac{\left(c_{t+2}^{gi}\right)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$; `// Ligning (5.2.1)`

Resultater

Resultater fra numerisk løsning i Matlab

	Fødselskull	Modell 7.1		Modell 7.2	
		L	H	L	H
k	l	0,0644	0,0644	0,0678	0,0678
	s	0,0759	0,0759	0,0710	0,0710
r^*	l	0,0370	0,0370	0,0391	0,0391
	s	0,0422	0,0422	0,0406	0,0406
we^u	l	0,1871	0,3073	0,1902	0,3126
	s	0,1976	0,3246	0,1932	0,3174
we^m	l	0,2964	0,4799	0,2898	0,4692
	s	0,2806	0,4543	0,2854	0,4620
I	l	0,3114	0,4994	0,3037	0,4887
	s	0,2989	0,4817	0,3012	0,4848
s^u	l	0,0210	0,0403	0,0275	0,0501
	s	0,0364	0,0642	0,0313	0,0563
s^m	l	0,0764	0,1585	0,0849	0,1690
	s	0,0878	0,1758	0,0840	0,1698
c^u	l	0,1473	0,2363	0,1437	0,2312
	s	0,1415	0,2279	0,1425	0,2294
c^m	l	0,2338	0,3568	0,2352	0,3611
	s	0,2479	0,3798	0,2422	0,3707
c^g	l	0,2413	0,4288	0,2429	0,4292
	s	0,2315	0,4138	0,2358	0,4207
p	l	0,0667	0,0667	0,0547	0,0547
	s	0,0499	0,0499	0,0547	0,0547
$U(c)$	l	**-3,5188**	**-2,5081**	**-3,5370**	**-2,5212**
	s	**-3,5389**	**-2,5183**	**-3,5386**	**-2,5208**
Y	l, s	1,5002	1,5002	1,6409	1,6409

Tabell 7: Resultater fra modell 7

Modell 7.1 – *Tre-periode modell med ulike generasjonsstørrelser, et pensjonssystem, heterogene agenter og en lik andel av lavt utdannede i begge generasjonene*
Modell 7.2 – *Tre-periode modell med like generasjonsstørrelser, et pensjonssystem, heterogene agenter og en større andel lavt utdannede i generasjonen med innvandrere*
Kommentar – *Den numeriske verdien på pensjonsutbetalingene i modell 7.2 er ikke identiske, men like ned til fire desimaler*

5.4.3 Modellimplikasjoner

Jeg tar utgangspunkt i en modell med ulike generasjonsstørrelser, heterogene agenter og et løpende finansiert pensjonssystem og ser på effekten av innvandring. Den totale effekten er at lavt utdannede agenter i en stor generasjon kommer bedre ut, mens agenter tilhørende de andre gruppene kommer dårligere ut. Denne endringen forårsakes som i modell 6 av to effekter. Den ene effekten er at nytten til agenter tilhørende en liten generasjon forverres når man reduserer gapet mellom generasjonsstørrelsene. Den andre effekten er at andelen lavt utdannede øker i de tidligere "små" generasjonene.

Hvis vi sammenligner resultatene i modell 7 med modell 6, ser vi at innvandring er mindre fordelaktig når vi introduserer et omfordelende pensjonssystem. De innvandrende agentene er lavtlønnede og bidrar derfor mindre skattemessig til pensjonssystemet. I denne modellen resulterer denne effekten i at høyt utdannede agenter tilhørende en stor generasjon, i tillegg til agenter tilhørende en liten generasjon, opplever en reduksjon i livstidsnytten. Alt i alt er det altså kun lavt utdannede agenter, tilhørende et stort fødselskull, som opplever en forbedring.

6 Tolkning av modellene

6.1 Modell 1 – Grunnmodellen

For modell 1 gjør jeg to simuleringer. I modell 1.1 er fødselskullene like store, mens jeg i modell 1.2 lar annenhver generasjon være stor og liten. Hensikten er å analysere effekten av det å være medlem av et stort fødselskull; og rangeringen av livstidsnytte forteller oss noe om hvilket utfall som er best. Det er viktig å understreke at forskjellene i nytte ikke kan si noe om hvor mye bedre et utfall er, da nyttebegrepet ikke er avhengig av skala, kun rangering.

Modellen impliserer at det er best å være medlem av en liten generasjon når vi har ulike generasjonsstørrelser. Fra ligning (6) vet vi at renten reduseres når kapital per arbeider øker. Kapitalen som den lille generasjonen sparer er innsatsfaktor sammen med arbeidskraft fra en stor generasjon. Kapital spart av den lille generasjonen oppnår dermed høyere avkastning enn kapital spart av den store generasjonen. Med samme argument så følger det også at agenter i den lille generasjonen mottar høyere avkastning av sin arbeidskraft enn i den store generasjonen.

Agenter tilhørende den lille generasjonen har derfor høyere konsum i hver periode. Med den parametriseringen jeg har gjort velger agentene å konsumere mer i første periode enn i andre periode. Den neddiskonterte verdien av å spare en ekstra enhet som ung og bruke på konsum som pensjonist er mindre enn én. Dette følger fra førsteordensbetingelsen i ligning (3). På grunn av den enkle strukturen i denne modellen er de økonomiske mekanismene veldig klare.

6.2 Modell 2 – Tre periode OLG

I grunnmodellen oppnår agenter tilhørende en liten generasjon høyere avkastning både på oppspart kapital og av sin arbeidskraft. Agenter tilhørende en liten generasjon oppnår derfor relativt høyere livstidsnytte. I den utvidede modellen gjør hver agent to sparebeslutninger og ulikt produktivitetsnivå gjennom livet. I tillegg består arbeidsstyrken av agenter fra forskjellige generasjoner, så de økonomiske mekanismene er mindre intuitive.

I tre-periode modellen med like generasjonsstørrelser konsumerer agentene mer når de blir eldre. Dette er i motsetning til grunnmodellen hvor agentene konsumerer mest i første periode. Dette følger av at avkastningen av kapital er høyere enn neddiskonteringen av framtidig konsum. Førsteordensbetingelsene i ligning (16) og (17) er med andre ord større enn én. Foruten den kvalitative forskjellen gir det ingen mening å sammenligne verdiene fra modellen med to og tre perioder.

Modell 2.2 er en tre-periode modell med to ulike generasjonsstørrelser. Som en forenkling simulerer jeg også en modell med like generasjonsstørrelser (modell 2.1). Det er dermed enklere å separere effekten av å utvide grunnmodellen og effekten av ulike generasjonsstørrelser. Fra kapittelet hvor vi introduserte tre-periode modellen vet vi at hvis vi tar utgangspunkt i en situasjon med like generasjonsstørrelser og øker størrelsen på annenhver generasjon, (fra modell 2.1 til modell 2.2), vil agenter tilhørende en relativt mindre generasjon oppnå høyere livstidsnytte, mens agenter tilhørende en stor generasjon vil oppleve en reduksjon i livstidsnytten.

En agent tilhørende en liten generasjon mottar lavere lønn som ung og høyere lønn som middelaldrende sammenlignet med en agent tilhørende en stor generasjon. Den relativt lave lønnen som ung er et resultat av at arbeidsstokken da også består av en stor middelaldrende høyt produktiv generasjon, noe som driver ned lønnen. Symmetrisk gjelder argumentet for høyere lønn som middelaldrende.

Agentene sparer mest som middelaldrende siden de er avhengig av oppsparte midler som pensjonister i den siste perioden. En agent tilhørende en liten generasjon står overfor en lavere rente som ung og en høyere rente som middelaldrende, sammenlignet med en agent tilhørende en stor generasjon. Den relativt lave renten agenten som ung står overfor skyldes at kapitalstokken er stor i denne perioden, siden den store generasjonen sparer til pensjonisttilværelsen.

Målt relativt til konsum i første periode er prisen på tredje periode konsum lik for agenter tilhørende de to generasjonsstørrelsene siden de står overfor de samme rentene, men i forskjellige perioder. Prisen på konsum i andre periode, målt relativt til konsum i første periode, er høyere for en ung agent tilhørende en liten generasjon siden renten er relativt lavere. Agenten ønsker derfor å vri konsum i andre periode over til konsum i første og siste periode. En agent tilhørende en liten generasjon konsumerer derfor mer som ung og som pensjonist og mindre som middelaldrende, sammenlignet med en agent tilhørende en stor generasjon. De økonomiske mekanismene er mer kompliserte enn i grunnmodellen, men høyere nåverdi av livstidsinntekten gjør at agenter tilhørende en liten generasjon oppnår høyere livstidsnytte også i denne modellen.

6.3 Modell 3 – Åpne kapitalmarkeder

I modell 3 er det mulig for agentene å spare eller låne i internasjonale kapitalmarkeder. Simuleringen finner likevekten hvor netto fordringer overfor utlandet er null på lang sikt. Det vil si at løsningen er den renten som gjør at ligning (31) er lik null samtidlig som ingen av agentene ønsker å endre sin atferd ved denne renten.

Når vi utvider modellen med mulighet til å spare i internasjonale kapitalmarkeder utlignes forskjellen mellom de små og de store generasjonene. Agentene tilhørende de to generasjonsstørrelsene mottar den samme lønnen og den samme avkastningen av kapital. Agentene oppnår i denne modellen lik livstidsnytte som i tre-periode modellen med like generasjonsstørrelser (modell 2.1).

Agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene velger å låne penger i internasjonale kapitalmarkeder for å investere innenlands når de er unge og spare i internasjonale kapitalmarkeder når de er middelaldrende. Agenter tilhørende den store generasjonen velger å spare relativt mer (544 %) enn agenter tilhørende en liten generasjon i internasjonale kapitalmarkeder når det er unge, mens den unge generasjonen låner relativt mer (299 %) som middelaldrende.

Når vi åpner modellen med internasjonale kapitalmarkeder ser vi at ulike generasjonsstørrelser ikke gir ulik livstidsnytte. Resultatene fra denne modellen impliserer derfor at vi ikke kan argumentere for økt innvandring for å møte de demografiske utfordringene vi står overfor.

6.4 Modell 4 – Skattebasert pensjonsordning

I modell 4 introduserte jeg et løpende finansiert pensjonssystem i modellen. Agentene belastes med en skatt på inntekt som unge og som middelaldrende, og de mottar pensjonsutbetalinger i siste periode. For å kunne sammenligne effekten på livstidsnytte av introduksjonen av et pensjonssystem på en enklere måte, inkluderer jeg også resultatene fra modell 2.2, den enkle tre-periode modellen med ulike generasjonsstørrelser.

Introduksjonen av pensjonssystemet reduserer livstidsnytten for agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene. Skatten på inntekt har en vridende effekt på prisen for konsum i de forskjellige periodene. Som forventet mottar agenter tilhørende den lille generasjonen relativt høyere pensjonsutbetalinger siden det er en større effektiv arbeidsstyrke å skattlegge når de er pensjonister.

Det er mange andre grunner til å introdusere et pensjonsprogram foruten det å overføre kapital fra en generasjon til en annen. I denne utvidelsen har jeg ikke tatt med slike aspekter. Modellen kan derfor ikke implisere noe om pensjonssystemer, men er en byggesten i den siste modellen, modell 7.

6.5 Modell 5 – Heterogenitet

Modellene 5.1 og 5.2 er de samme foruten at jeg har antatt henholdsvis like og ulike generasjonsstørrelser. Agenter med høy utdannelse og dermed høy produktivitet mottar en høyere lønn enn lavt utdannet arbeidskraft og oppnår derfor høyere livstidsnytte. Som forventet kommer agenter tilhørende den lille generasjonen bedre ut i denne modellen også. Siden denne modellen er parametrisert forskjellig fra de tidligere modellene gir det ingen mening å sammenligne verdiene.

6.6 Modell 6 – Innvandring

I modell 6.2 forutsetter jeg at gapet i størrelsen mellom generasjonene reduseres ved hjelp av innvandring. Modell 6.2 kan dermed også tolkes som en modell med like generasjonsstørrelser, men der andelen lavt utdannede er høyere i den ene generasjonen. Effekten av innvandringen kan deles opp i to deler: effekten av utjevnede generasjonsstørrelser og effekten av en større andel lavt utdannede personer. Overgangen fra modell 6.1 til modell 6.2 er effekten av en høyere andel lavt utdannede, mens endringen fra modell 5.2 (kun heterogenitet) til 6.1 er effekten av at gapet i generasjonsstørrelser reduseres.

Den første effekten er at livstidsnytten faller for agenter tilhørende en liten generasjon og øker for agenter tilhørende en stor generasjon når gapet mellom generasjonsstørrelsene reduseres. Den andre effekten er symmetrisk med den første, bare at vi nå ser på en endring i antall effektive arbeidere.

I modell 6.2 har generasjonene som opplever innvandring en høyere andel lavt utdannede arbeidere. Isolert sett gir færre effektive arbeidere lavere total produksjon og dermed en reduksjon i lønnen. Samtidig impliserer færre effektive arbeidere økt lønn per arbeider, hvis vi holder kapitalmengden konstant. Denne effekten er størst i andre periode når en "liten" generasjon er middelaldrende og reduksjonen i antall effektive arbeidere er størst. Fra resultatet av den numeriske simuleringen har vi at lønnen per arbeider øker i den perioden en "liten" generasjon er middelaldrende og reduseres i perioden når en "liten" generasjon er ung.

Symmetrisk har vi at en større andel lavt utdannede personer i en "liten" generasjon gir lavere avkastning av kapital siden det er færre effektive arbeidere per kapitalenhet. Denne effekten er også størst når en "liten" generasjon er middelaldrende. En større andel lavt utdannede vil også isolert sett bety redusert sparing fra en "liten" generasjon. Denne effekten gir høyere rente og påvirker renten mest når agenter i en "liten" generasjon sparer til pensjonisttilværelsen. Fra simuleringen har vi sett at avkastningen på pensjonssparingen for disse agentene øker, mens avkastningen av kapital reduseres i den andre perioden.

Nåverdien av livstidsinntekten og prisen på konsum i andre periode øker for en agent tilhørende en "liten" generasjon, mens de reduseres for en agent tilhørende en "stor" generasjon. Alt i alt reduseres livstidsnytten for en agent tilhørende en "liten" generasjon og øker for en agent tilhørende en "stor" generasjon. Agenter i en generasjon som mottar de innvandrende agentene kommer altså dårligere ut med innvandring. Agenter tilhørende de andre generasjonene oppnår høyere nytte når gapet i generasjonsstørrelsen reduseres, og kommer derfor bedre ut med innvandring.

6.7 Modell 7 – Innvandring, heterogenitet og pensjonsordning

I modell 7.1 har vi et pensjonssystem med heterogene agenter, altså en sammenslåing av modell 4 og modell 5. Fra modell 4 har vi at agenter tilhørende en liten generasjon mottar en relativt større pensjonsutbetaling og oppnår høyere livstidsnytte. I modell 5 ser vi at dette fortsatt holder med heterogenitet i produktiviteten til agentene. Simuleringen av modell 7.1 impliserer de samme resultatene. Det er bra å være høyt utdannet og tilhøre en liten generasjon.

I modell 7.2 introduserer jeg innvandring av lavt utdannet arbeidskraft. Når vi sammenligner med modell 7.1, uten innvandring, impliserer resultatene fra denne modellen at lavt utdannede agenter tilhørende den tidligere store generasjonen oppnår høyere livstidsnytte med innvandring, mens de andre agentene opplever et fall i livstidsnytten.

Overgangen fra modell 7.1 til 7.2 er effekten av innvandring i en modell med et pensjonssystem, mens overgangen fra modell 6.1 til modell 6.2 er effekten av innvandring uten et pensjonssystem. Hvis vi sammenligner resultatene fra disse to modellene, ser vi at effekten av innvandring av lavt utdannede agenter er mindre fordelaktig når vi introduserer et pensjonssystem. Dette skyldes av at pensjonssystemet har en fordelende effekt mellom lavt og høyt utdannet arbeidskraft.

7 Robust sjekk

En av de økonomiske mekanismene som påvirker modellutfallene i tre-periode modellene er hvordan livstidsnytten til agenten endres når den relative forskjellen i generasjonsstørrelsene endres. I figur (3a) i appendiks (B) er utviklingen i livstidsnytten illustrert grafisk. Fra en situasjon med like generasjonsstørrelser øker livstidsnytten til agenter tilhørende en generasjon som ikke opplever en økning i generasjonsstørrelsen. Agenter tilhørende en generasjon som øker i størrelse vil opptil en relativt stor økning oppnå lavere livstidsnytte enn i utgangssituasjonen. I modellene med innvandring er vi interessert i hvordan en utjevning av generasjonsstørrelsene påvirker modellutfallet. Ved å lese grafene i motsatt retning ser vi at livstidsnytten til en agent tilhørende en liten generasjon reduseres og livstidsnytten til en agent tilhørende en stor generasjon øker.

For å se hvor robust effekten på livstidsnytten av en endring i generasjonsstørrelsen er, tester jeg modellen med forskjellige parameterverdier. Illustrert grafisk i appendiks (B) ser vi hvordan forskjellige parameterverdier påvirker utviklingen i livstidsnytten til agenter tilhørende en liten og en stor generasjon. Som vi ser, er det mulig å parametrisere modellen slik at den store generasjonen også oppnår høyere livstidsnytte når forskjellen på generasjonsstørrelsene øker. I dette tilfellet holder ikke argumentasjonen om at man ønsker å utjevne forskjellene i generasjonsstørrelsene, da dette reduserer livstidsnytten for agenter tilhørende begge generasjonsstørrelsene.

8 Konklusjon

Avkastningen av kapital og arbeidskraft avhenger av raten mellom disse to innsatsfaktorene - kapital per arbeider. I den enkle to-periode modellen består arbeids- og kapitalstokken av arbeidstakere fra en generasjon og sparing gjort av agenter tilhørende den foregående generasjonen. De relative forskjellene mellom generasjonsstørrelsene impliserer dermed at kapital per arbeider er lav når agenter tilhørende en liten generasjonen er unge og høy når de er gamle. Disse agentene oppnår derfor både høy avkastning av sin arbeidskraft og på sin sparing, og derfor høyere livstidsnytte enn agenter tilhørende en stor generasjon. Sammenhengen mellom relative generasjonsstørrelser, avkastning av kapital og arbeidskraft og livstidsnytte er veldig tydelige i denne modellen, og kan derfor gi opphav til argumentet om at man ønsker å utjevne forskjellen i generasjonsstørrelser ved innvandring.

Tre-periode modellen gir de samme kvalitative resultatene som grunnmodellen. I denne modellen består arbeids- og kapitalstokken av bidrag fra flere generasjoner, så sammenhengen mellom generasjonsstørrelser og livstidsnytte er ikke like rett frem som i grunnmodellen.

I modellen med åpne kapitalmarkeder letter vi på forutsetningen om en lukket økonomi hvor sparing er lik innenlands investering. Når vi åpner for sparing i internasjonale kapitalmarkeder, ser vi at argumentet med at generasjonsstørrelser skaper forskjeller faller bort. Sparing fra en stor generasjon kan investeres i utlandet i stedet for å drive ned avkastningen av kapital i Norge. I Norge i dag gjøres store pensjonssparinger i de internasjonale kapitalmarkedene gjennom Statens pensjonsfond - Utland. Dette er akkurat hva denne modellen impliserer; at vi kan møte de økonomiske utfordringene knyttet til den demografiske utfordringen ved økt sparing i internasjonale kapitalmarkeder.

Jeg velger å analysere effekten av å åpne arbeidsmarkedene for innvandring i en modell med heterogenitet og med et skattefinansiert pensjonssystem. Dette gjør det mulig å analysere hvordan innvandring av lavt utdannet arbeidskraft påvirker forskjellige grupper i økonomien, lavt og høyt utdannede agenter. Den numeriske løsningen av modell 7 impliserer at kun lavt utdannede agenter tilhørende en stor generasjon opplever en forbedring av livstidsnytten som følge av innvandringen.[46] Når vi sammenligner disse resultatene med resultatene fra modell 6 finner vi at innvandring av lavt utdannede agenter er mindre fordelaktig i en økonomi med et pensjonssystem.[47] Dette skyldes pensjonssystemets omfordelende effekt. Lavt utdannede agenter er netto mottakere av pensjonsrettigheter siden de bidrar mindre skattemessig. Argumentet om økt innvandring for å takle utfordringene i pensjonssystemet, gjennom en reduksjon av forsørgelsesbyrden, støttes altså ikke av denne modellen heller.

Det modellerte pensjonssystemet gir en utbetaling til agentene når de er gamle. For lavt utdannede agenter betyr denne overføringen at de kan spare mindre tidligere i livet og derfor konsumere mer som unge og middelaldrene. Dette kan tolkes som at det offentlige tilbyr velferdstjenester som er subsidiert for de lavtlønnede, slik at de lavtlønnede agentene kan øke sitt konsum. Det modellerte pensjonssystemet kan derfor tolkes som en stat som omfordeler gjennom offentlige goder. Hvis det er slik at lavt utdannede innvandrere

[46]Modell 7: Tre-periode modell med et pensjonssystem, heterogene agenter og innvandring.

[47]Modell 6: Tre-periode modell med heterogene agenter og innvandring. Altså lik som modell 7, men uten et pensjonssystem.

er netto mottakere i det norske velferdssystemet, er innvandring en dårlig måte å møte de økonomiske utfordringen som følger av den demografiske utviklingen. Man burde da heller øke sparingen i de internasjonale kapitalmarkedene, for eksempel gjennom Statens pensjonsfond - Utland.

I denne oppgaven argumenterer jeg imot at man kan bruke en reduksjon i forsørgelsesbyrden som argument for økt innvandring, men dette er ikke et argument mot innvandring generelt. Det kan være mange andre grunner til at man ønsker innvandring. Innvandring av høyt utdannede personer kan bidra med ny god kompetanse. Innvandring kan også bidra til mangfold og økt forståelse på tvers av landegrenser og kulturer.

Det er åpenbart at nettoeffekten av innvandring er komplisert å evaluere. Jeg håper denne oppgaven kan bidra til å klargjøre noen av de sentrale mekanismene ved økt innvandring og dermed bidra til en mer opplyst debatt.

Referanser

AID (2008), 'Stortingsmelding nr 18 (2007-2008) - Arbeidsinnvandring', p. side 21.
URL: *http://www.regjeringen.no/nb/dep/aid/dok/regpubl/stmeld/2007-2008/stmeld-nr-18-2007-2008-.html?id=507744 , (01.04.2009)*

Barro, R. J. & Sala-i-Martin, X. (2003), *Economic growth, second edition*, The MIT Press. side 190:195.

Bernt Bratsberg, O. R. & Røed, K. (2006), 'The rise and fall of immigrant employment: A lifecycle study of labor migrants to Norway'.
URL: *http://www.frisch.uio.no/pdf/riseandfall.pdf , (01.04.2009)*

Cooley, T. (1997), 'Calibrated models', *Oxf Rev Econ Policy* **13**(3), 55–69.
URL: *http://oxrep.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/13/3/55 , (01.04.2009)*

Fafo (2007), 'Fafo-rapport 2007:27 - Polonia i Oslo', p. side 40.
URL: *http://www.fafo.no/pub/rapp/20027/index.htm , (01.04.2009)*

FOM (2009), 'Living and working in Switzerland'.
URL: *http://www.swissemigration.ch/themen/laenderinfos/laenderliste/00151/& index.html?lang=en, (01.06.2009)*

Gomme, P., Kydland, F. E. & Rupert, P. (2001), 'Home production meets time to build', *Journal of Political Economy* **109**(5), 1115–1131.
URL: *http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/322829 , (01.04.2009)*

Kydland, F. E. & Prescott, E. C. (1982), 'Time to build and aggregate fluctuations', *Econometrica* **50**(6), 1345–1370.
URL: *http://www.jstor.org/stable/1913386 , (01.04.2009)*

NAV (2008), 'Trygdeavgift'.
URL: *http://www.nav.no/page?id=805312597 , (01.04.2009)*

NAV (2009*a*), 'Folketrygdloven, §§ 19-2 til 19-4'.
URL: *http://www.lovdata.no/all/hl-19970228-019.html , (01.04.2009)*

NAV (2009*b*), 'Folketrygdloven, §§ 2-1 til 2-2'.
URL: *http://www.lovdata.no/all/hl-19970228-019.html , (01.04.2009)*

NOU (2004), 'Norges offentlige utredninger 2004:1 - Modernisert folketrygd (bærekraftig pensjon for framtida), tabell 3.3', p. side 48.
URL: *http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/nouer/2004/NOU-2004-1.html?id=383364 , (01.04.2009)*

OECD (2007*a*), 'OECD Employment Outlook 2007 - Statistical Annex - Table H (source: OECD database on earnings distribution)'.
URL: *http://www.oecd.org/dataoecd/29/27/38749309.pdf , (01.04.2009)*

OECD (2007*b*), 'OECD Employment Outlook 2007 - Table I. Average annual wages in the total economy', p. 269.
URL: *http://www.sourceoecd.org/upload/8107131e.pdf , (01.04.2009)*

Pedersen, L. H., Knudsen, M. B., Madsen, A. D., Schou, P., Sørensen, M. L., Andersen, M. & Stephensen, P. (2004), 'Indvandrere, offentlige udgifter og finanspolitisk holdbarhed'.
URL: *http://www.dreammodel.dk/pdf/R20041001.pdf, (01.06.2009)*

Petersen, J., Foss, P.-K. & Solberg, E. (2000), Innstilling til Stortinget nr. 178 (2000-2001).

Saglie, T. (2008), 'Framtidige utviklingstrekk innen arbeids- og velferdsområdet'.

SSB (2005), 'Heltidsekvivalenter, alle ansatte. gjennomsnittlig månedsfortjeneste, etter kjønn og aldersgruppe. 3. kvartal 2001-2005'.
URL: *http://www.ssb.no/emner/06/05/nos_lonn/nos_d362/tab/tab-004.html , (01.04.2009)*

SSB (2007*a*), 'Tabell: 03731, statsregnskapet medregnet Folketrygden. utgifter, etter programområde'.
URL: *http://statbank.ssb.no/statistikkbanken/Default_FR.asp?PXSid=0&nvl=true&PLanguage=0&tilside=selectvarval/define.asp&Tabellid=03731 , (01.04.2009)*

SSB (2007*b*), 'Tabell: 481, statsregnskapets skatter og avgifter'.
URL: *http://www.ssb.no/aarbok/tab/tab-481.html , (01.04.2009)*

SSB (2008*a*), 'Folkemengden 1. januar. registrert 2008. framskrevet 2009-2060, etter fjorten alternativer. 1 000'.
URL: *http://www.ssb.no/emner/02/03/folkfram/tab-2008-05-08-01.html , (01.04.2009)*

SSB (2008*b*), 'Gjennomsnittlig månedslønn for heltidsansatte i kommunal og fylkeskommunal virksomhet, etter kjønn og utdanning. 1. desember 20061 og 2007'.
URL: *http://www.ssb.no/emner/06/05/lonnkomm/arkiv/tab-2008-04-11-02.html , (01.04.2009)*

SSB (2008*c*), 'Gjennomsnittlig månedslønn for heltidsekvivalenter, etter næringshovedområde per 3. kvartal 2006-2007'.
URL: *http://www.ssb.no/emner/06/05/lonnansatt/tab-2008-06-19-02.html , (01.04.2009)*

SSB (2008*d*), 'Statistisk årbok tabell 47 - Folkemengde per 1. januar, fødte, døde, flyttinger og folketilvekst'.
URL: *http://www.ssb.no/aarbok/tab/tab-047.html , (01.04.2009)*

SSB (2008*e*), 'Sysselsatte og arbeidsledige på korttidsopphold i Norge, 4. kvartal 2007'. [01.04.2009].
URL: *http://www.ssb.no/kortsys/ , (01.04.2009)*

SSB (2009), ‘Folkemengde, etter alder og fylke. absolutte tall. 1. januar 2009’.
URL: *http://www.ssb.no/emner/02/01/10/folkemengde/tab-2009-03-12-01.html , (01.04.2009)*

Storesletten, K. (2000), ‘Sustaining fiscal policy through immigration’, *Journal of Political Economy* **108**(2), 300–323.
URL: *http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v108y2000i2p300-323.html, (01.06.2009)*

UDI (2008), ‘Udi 20 år: Rekordmange utlendinger med arbeidstillatelse’.
URL: *http://udi.no/templates/Page.aspx?id=9279 , (01.04.2009)*

UDI (2009), ‘Faktaark om statsborgerskap’.
URL: *http://www.udi.no/upload/Pub/FaktaArk/FaktaarkStatsborgerskapNorsk.pdf , (01.06.2009)*

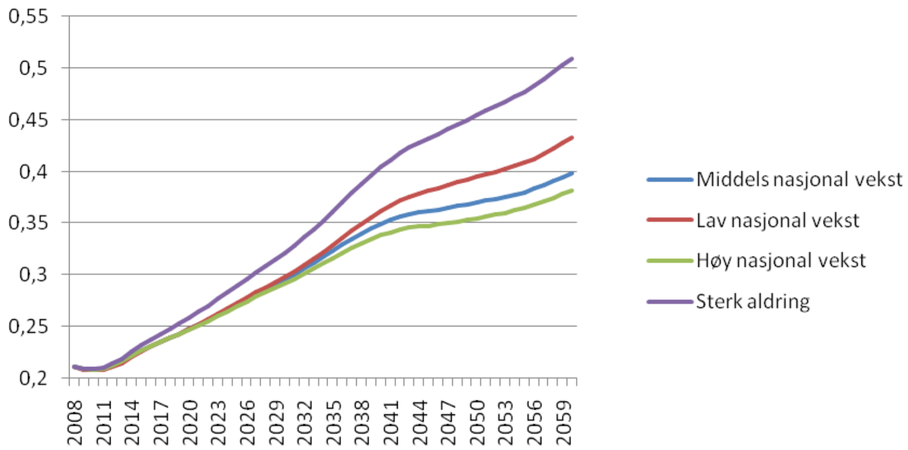
UDI (n.d.), ‘Ny i Norge - Medlemskap i Folketrygden’.
URL: *http://www.nyinorge.no/modules/module_123/proxy.asp?C=398I=1892D=2 , (01.04.2009)*

Velfærdskommissionen (2005), ‘Fremtidens velfærd - vores valg’.
URL: *http://www.fm.dk/Publikationer/Velfaerdskommissionen/2008/& Rapporter%20fra%20Velfaerdskommissionen.aspx, (01.06.2009)*

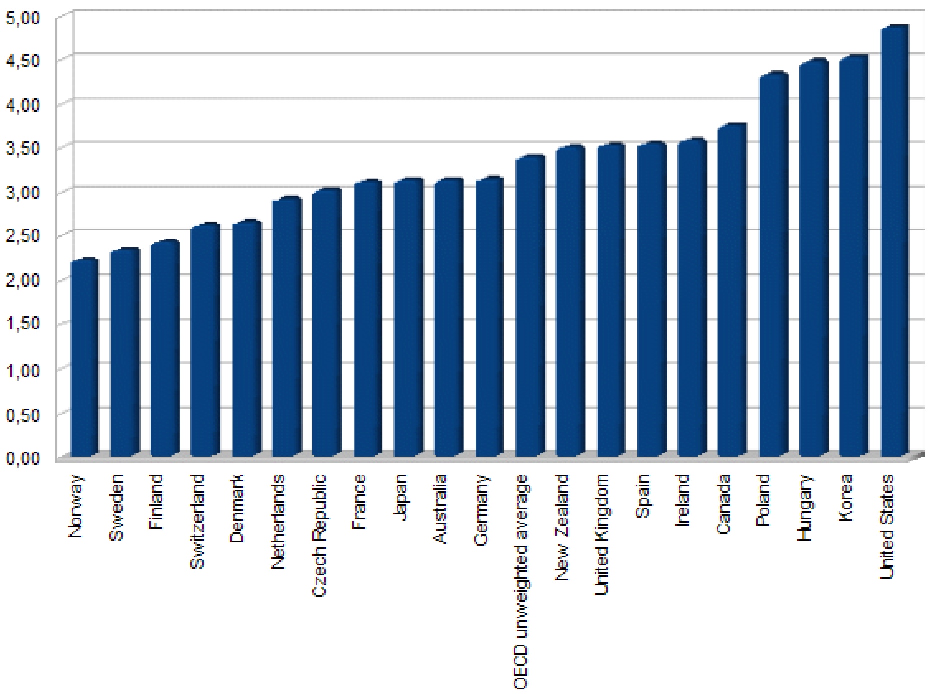
A Introduksjon – figurer og tabeller

1946–55	1956–65	1966–75	1976–85	1986–95	1969–05
64182	63505	64045	51202	58529	57991

Tabell 8: Gjennomsnittlig antall levendefødte per tiår etter 1946 – (SSB 2008*d*)

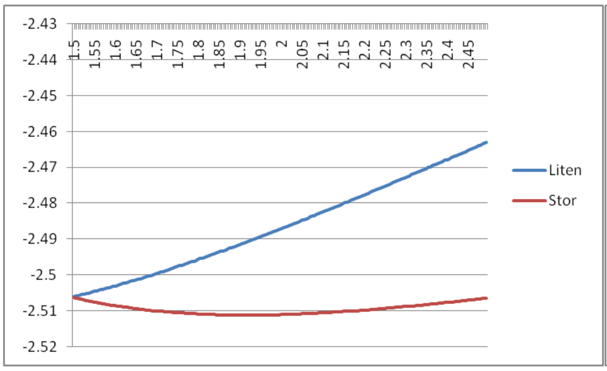


Figur 1: Forsørgelsesbyrden gitt Statistisk sentralbyrås befolkningsframskrivninger – (SSB 2008*a*)

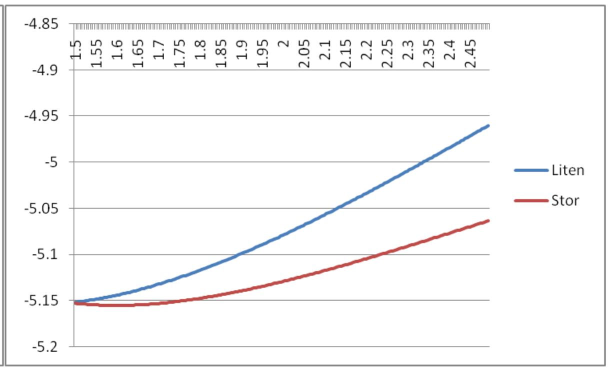


Figur 2: Lønnsforskjeller – øverste prosentil delt på nederste prosentil D9/D1 – (OECD 2007*a*)

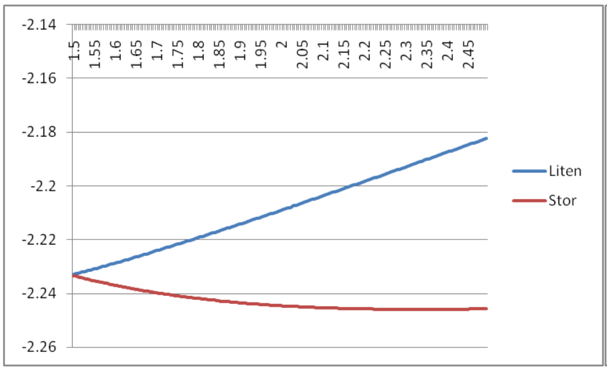
B Robust sjekk – figurer



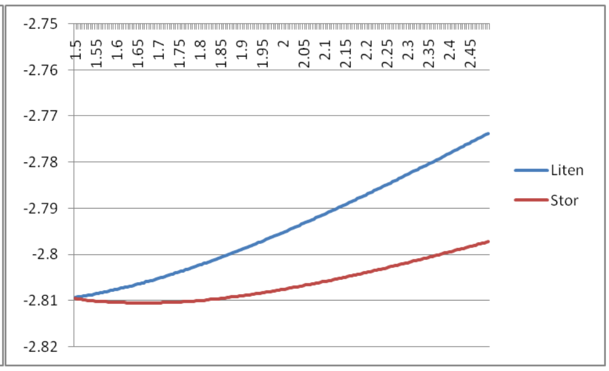
(a) $\tilde{\alpha} = (1/3)$, $\tilde{\beta} = 0,98$, $\tilde{\delta} = 0,075$



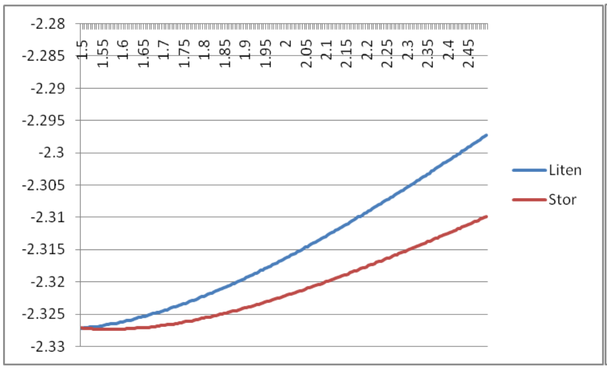
(b) $\tilde{\sigma} = 2$



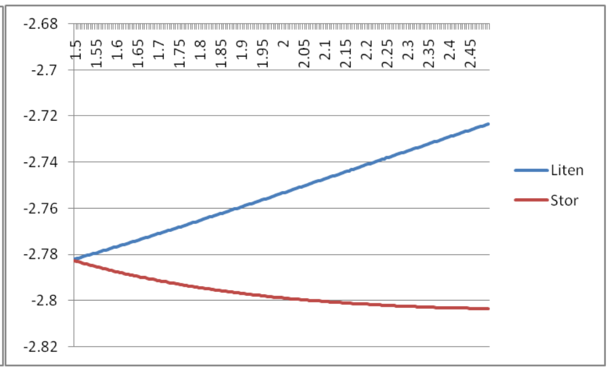
(c) $\tilde{\alpha} = (1/3) * 0,9$



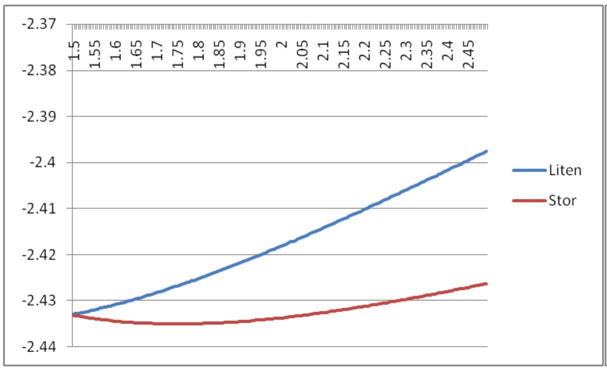
(d) $\tilde{\alpha} = (1/3) * 1,1$



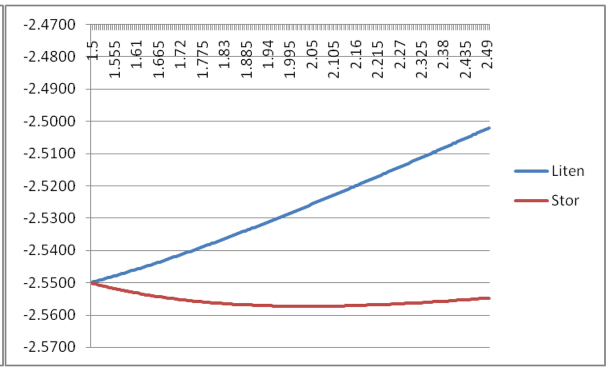
(e) $\tilde{\beta} = 0,97$



(f) $\tilde{\beta} = 0,99$



(g) $\tilde{\delta} = 0,05$



(h) $\tilde{\delta} = 0,1$

Figur 3: Robust sjekk

C Modell 1 – algebra

Førsteordensbetingelsen:

$$-\left(c_t^u\right)^{-\theta}+\beta\left(c_{t+1}^g\right)^{-\theta}\left(1+r_{t+1}\right)=0$$

eller

$$\beta\left(\frac{c_t^u}{c_{t+1}^g}\right)^{\theta}\left(1+r_{t+1}\right)-1=0$$

budsjettbetingelsene løst med hensyn på c_t^u og c_{t+1}^g og satt inn i førsteordensbetingelsen gir:

$$\beta\left(\frac{w_t e^u-s_t^u}{\left(1+r_{t+1}\right)s_t^u}\right)^{\theta}\left(1+r_{t+1}\right)-1=0$$

$$\frac{w_t e^u-s_t^u}{s_t^u}=\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}$$

$$\frac{w_t e^u-s_t^u}{s_t^u}=\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}$$

løst med hensyn på sparebeslutningen får vi

$$s_t^u=\frac{1}{\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}+1}w_t e^u$$

Forutsatt at $\theta=1$ (logaritmisk nyttefunksjon) og satt inn for w_t and for k_t

$$s_t^u=e^u\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\left(\frac{N_{t-1}}{N_t e^u}s_{t-1}^u\right)^{\alpha}$$

$$s_{t-1}^u=e^u\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\left(\frac{N_{t-2}}{N_{t-1}e^u}s_{t-2}^u\right)^{\alpha}$$

Utrykket for s_{t-1}^u satt inn i s_t^u gir:

$$s_t^u=e^u\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\left(\frac{N_{t-1}}{N_t e^u}\right)^{\alpha}\left(e^u\beta(1-\alpha)\gamma\left(\frac{N_{t-2}}{N_{t-1}e^u}s_t^u\right)^{\alpha}\right)^{\alpha}$$

På grunn av symmetrien i problemet er $s_{t-2}^u=s_t^u$, så vi har:

$$\left(s_t^u\right)^{1-\alpha^2}=\left(e^u\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\right)^{1+\alpha}\left(\frac{N_{t-1}}{N_t e^u}\right)^{\alpha}\left(\frac{N_{t-2}}{N_{t-1}e^u}\right)^{\alpha^2}$$

$$s_t^u=\left(e^u\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\gamma\right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}}\left(\frac{N_{t-1}}{N_t e^u}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}\left(\frac{N_{t-2}}{N_{t-1}e^u}\right)^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}}$$

D Modell 2 – algebra

Førsteordensbetingelsene:

$$-\left(c_t^u\right)^{-\theta} + \beta\left(c_{t+1}^m\right)^{-\theta}\left(1+r_{t+1}\right) = 0$$

$$-\left(c_{t+1}^m\right)^{-\theta} + \beta\left(c_{t+2}^g\right)^{-\theta}\left(1+r_{t+2}\right) = 0$$

budsjettbetingelsene løst med hensyn på c_t^u,c_{t+1}^m og c_{t+2}^g og satt inn i førsteordensbetingelsen gir:

$$\beta\left(\frac{w_t e^u - s_t^u}{\left(1+r_{t+1}\right)s_t^u + w_{t+1}e^m - s_{t+1}^m}\right)^{\theta}\left(1+r_{t+1}\right) - 1 = 0$$

$$\beta\left(\frac{\left(1+r_{t+1}\right)s_t^u + w_{t+1}e^m - s_{t+1}^m}{\left(1+r_{t+2}\right)s_{t+1}^m}\right)^{\theta}\left(1+r_{t+2}\right) - 1 = 0$$

eller

$$\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} w_t e^u + s_{t+1}^m = \left(\left(1+r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)s_t^u + w_{t+1}e^m$$

$$\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)s_t^u + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} w_{t+1}e^m = \left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)s_{t+1}^m$$

løst for s_t^u:

$$s_{t+1}^m = \left(\left(1+r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)s_t^u + w_{t+1}e^m - \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} w_t e^u$$

$$s_{t+1}^m = \frac{1}{\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}\left(\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)s_t^u + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} w_{t+1}e^m\right)$$

som satt sammen gir:

$$s_t^u = \frac{\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} w_t e^u - w_{t+1}e^m}{\left(1+r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}$$

løst for s_{t+1}^m:

$$s_t^u = \frac{\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} w_t e^u + s_{t+1}^m - w_{t+1}e^m}{\left(\left(1+r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)}$$

$$s_t^u = \frac{\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)s_{t+1}^m - \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} w_{t+1}e^m}{\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)}$$

som satt sammen gir:

$$s_{t+1}^m = \frac{\beta^{\frac{2}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(w_{t+1}e^m + \left(1+r_{t+1}\right)w_t e^u\right)}{\left(1+r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}$$

Antagelsen om at $\theta = 1$ gir:

$$s_t^u = \frac{(1+\beta)\,\beta\,(1+r_{t+1})\,w_t e^u - w_{t+1}e^m}{(1+r_{t+1})+\beta\,(1+r_{t+1})\,(1+\beta)} \\ = G^u\,(r_{t+1}, w_t, w_{t+1})$$

$$s_{t+1}^m = \frac{\beta^2\,(1+r_{t+1})\,(w_{t+1}e^m + (1+r_{t+1})\,w_t e^u)}{(1+r_{t+1})+\beta\,(1+r_{t+1})\,(1+\beta)} \\ = G^m\,(r_{t+1}, w_t, w_{t+1})$$

E Modell 3 – algebra

Førsteordensbetingelsene:

$$u'\left(c_t^u\right) - \beta\,(1+r_{t+1})\,u'\left(c_{t+1}^m\right) = 0$$

$$u'\left(c_{t+1}^m\right) - \beta\,(1+r_{t+2})\,u'\left(c_{t+2}^g\right) = 0$$

$$\frac{w_t e^u - s_t^u - b_t^u}{(1+r_{t+1})\,s_t^u + \left(1+r_{t+1}^i\right)b_t^u + w_{t+1}e^m - s_{t+1}^m - b_{t+1}^m} - \beta^{-\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$\frac{(1+r_{t+1})\,s_t^u + \left(1+r_{t+1}^i\right)b_t^u + w_{t+1}e^m - s_{t+1}^m - b_{t+1}^m}{(1+r_{t+2})\,s_{t+}^m + \left(1+r_{t+2}^i\right)b_{t+1}^m} - \beta^{-\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

De 2 siste betingelsene kan også skrives:

$$\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\,w_t e^u - w_{t+1}e^m + s_{t+1}^m + b_{t+1}^m = \\ \left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\right)s_t^u + \left(\left(1+r_{t+1}^i\right)+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\right)b_t^u$$

$$\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,(1+r_{t+1})\,s_t^u + \beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(1+r_{t+1}^i\right)b_t^u + \beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,w_{t+1}e^m = \\ \left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)s_{t+}^m + \left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)b_{t+1}^m$$

Disse to ligningene løst med hensyn på b_t^u gir:

$$b_t^u = Z^u\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}\right) - s_t^u$$

hvor:

$$Z^u\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) = \frac{\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\,w_t e^u - w_{t+1}e^m}{\left(1+r_{t+1}^i\right)+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}$$

og løst med hensyn på b_{t+1}^m:

$$b_{t+1}^m = Z^m\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}\right) - s_{t+1}^m$$

hvor:

$$Z^m\left(r_{t+1}, r_{t+1}^i, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}\right) = \frac{\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\left(\left(1+r_{t+1}^i\right)w_t e^u + w_{t+1}e^m\right)}{\left(1+r_{t+1}^i\right)+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}}\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\,(1+r_{t+2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}$$

I likevekt er $r_{t+1} = r^i_{t+1}$ og $r_{t+2} = r^i_{t+2}$. Sammen med ligning (6) og (23) får vi:

$$\left(\frac{r^i_{t+1} + \delta}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = k_{t+1} = \frac{s^u_t N_t + s^m_t N_{t-1}}{N_{t+1}e^u + N_t e^m}$$

$$s^u_t = H^u\left(r^i_{t+1}; N_t, N_{t+1}\right) - \frac{N_{t-1}}{N_t} s^m_t$$

hvor:

$$H^u\left(r^i_{t+1}, N_t, N_{t+1}\right) = \frac{1}{N_t}\left(N_{t+1}e^u + N_t e^m\right)\left(\frac{r^i_{t+1} + \delta}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} -$$

og

$$s^m_{t+1} = H^m\left(r^i_{t+2}; N_t, N_{t+1}, N_{t+2}\right) - \frac{N_{t+1}}{N_t} s^u_{t+1}$$

hvor:

$$H^m\left(r^i_{t+2}, N_t, N_{t+1}, N_{t+2}\right) = \frac{1}{N_t}\left(N_{t+2}e^u + N_{t+1}e^m\right)\left(\frac{r^i_{t+2} + \delta}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

F Modell 4 – algebra

Førsteordensbetingelser:

$$u'\left(c^u_t\right) - \beta\left(1 + r_{t+1}\right)u'\left(c^m_{t+1}\right) = 0$$

$$u'\left(c^m_{t+1}\right) - \beta\left(1 + r_{t+2}\right)u'\left(c^g_{t+2}\right) = 0$$

$$\frac{(1-\tau)w_t e^u - s^u_t}{\left(1 + r_{t+1}\right)s^u_t + (1-\tau)w_{t+1}e^m - s^m_{t+1}} - \beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$\frac{\left(1 + r_{t+1}\right)s^u_t + (1-\tau)w_{t+1}e^m - s^m_{t+1}}{\left(1 + r_{t+2}\right)s^m_{t+} + p_{t+2}} - \beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

de 2 siste betingelsene kan også skrives:

$$\begin{aligned}\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}(1-\tau)w_t e^u &= \\ \left(\left(1 + r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)s^u_t + (1-\tau)w_{t+1}e^m - s^m_{t+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)s^u_t + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}(1-\tau)w_{t+1}e^m &= \\ \left(\left(1 + r_{t+2}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)s^m_{t+1} + p_{t+2}\end{aligned}$$

Disse to ligningene løst med hensyn på s^m_{t+1} gir:

$$\begin{aligned}s^m_{t+1} = \left(\left(1 + r_{t+1}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)s^u_t + (1-\tau)w_{t+1}e^m \\ -\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}(1-\tau)w_t e^u\end{aligned}$$

$$s^m_{t+1} = \frac{\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+1}\right)s^u_t + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}(1-\tau)w_{t+1}e^m - p_{t+2}}{\left(\left(1 + r_{t+2}\right) + \beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1 + r_{t+2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)}$$

som gir:

$$s_t^u = I^u\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right)$$

hvor:

$$I^u\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right) = \frac{(1-\tau)\left(\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} w_t e^u - w_{t+1}e^m\right)}{\left(1+r_{t+1}\right)+\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$
$$-\frac{\left(1+r_{t+2}\right)^{-1} p_{t+2}}{\left(1+r_{t+1}\right)+\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$

Symmetrisk løser vi ut betingelsene ut for s_t^u og får:

$$s_{t+1}^m = I^m\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right)$$

hvor:

$$I^m\left(r_{t+1}, r_{t+2}, w_t, w_{t+1}, p_{t+2}\right) = \frac{(1-\tau)\beta^{\frac{2}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\left(w_{t+1}e^m + \left(1+r_{t+1}\right) w_t e^u\right)}{\left(1+r_{t+1}\right)+\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$
$$-\frac{\left(1+r_{t+1}\right)\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1+\theta}{\theta}}\right)\left(1+r_{t+2}\right)^{-1} p_{t+2}}{\left(1+r_{t+1}\right)+\left(1+\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+2}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\beta^{\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$